

ОТ АВТОРОВ

В седьмом классе школьники начинают изучать новый раздел математики — алгебру. Поэтому цель обучения в 7 классе — развить интерес к решению алгебраических задач и показать применимость алгебраического подхода в других изучаемых в школе предметах — геометрии, физике, химии и так далее. В курсе алгебры 7 класса закладываются основные понятия и навыки: алгебраические выражения и их преобразования; одночлены и многочлены и действия с ними (включая формулы сокращенного умножения); уравнения и способы их решения; системы уравнений и способы их решения; функции и графики функций. В последующих классах эти понятия и способы решения будут уточняться и дополняться, но основы закладываются именно в начале обучения (в седьмом классе).

Данное пособие составлено для учебника Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешикова, С.Б. Суворовой (М.: Просвещение) и рассчитано на 136 уроков (тридцать четыре учебных недели). С небольшими изменениями оно может быть использовано также и для учебника Ш.А. Алимова, Ю.М. Колягина, Ю.В. Сидорова, Н.Е. Федоровой, М.И. Шабунина (М.: Просвещение). Нумерация задач в поурочном планировании дана для учебника Ю.Н. Макарычева.

В пособии подробно рассмотрено содержание каждого урока. Немножко расширен изучаемый материал: дано представление о нелинейных уравнениях и системах нелинейных уравнений; об уравнениях и системах уравнений, содержащих модули и параметры; построении графиков более сложных функций и уравнений; добавлены формулы сокращенного умножения: куб суммы и куб разности. Такое расширение материала вполне доступно для семиклассников, развивает их интерес к изучению алгебры и дает более цельное представление об изучаемых темах. Кроме того, приведенные дополнения подготавливают школьников к углубленному изучению математики в старших классах.

Предусмотрены два вида фронтального контроля успеваемости: контрольные работы и зачетные работы. Контрольные работы имеют три степени сложности. Выбор степени сложности определяется или учителем или учеником. При этом за решение более сложной контрольной работы ученик поощряется дополнительным баллом к оценке. В контрольной работе приводится на одну задачу больше, чем необходимо для получения высшей оценки. Наличие лишней задачи подразумевает некоторую свободу выбора у учащихся.

В пособии приведены 10 контрольных работ. Зачетные работы приведены для коррекции результатов контрольных работ. Задачи работы разбиты на три блока по степени сложности и оцениваются разным количеством баллов. Необходимое для получения оценки количество задач может быть набрано из разных блоков. Даже для получения высшей оценки необходимо решить не более половины задач варианта. Поэтому у учащихся имеется значительная свобода выбора в решении задач. Ме-

жду контрольной и зачетной работой предусмотрено несколько уроков для коррекции знаний учащихся. Приведены шесть зачетных работ по темам.

В конце обучения проводится итоговая контрольная работа, в которой проверяются навыки и умения учащихся по основным (базовым) темам.

Все контрольные и зачетные работы приведены с полным разбором всех задач всех вариантов. Этот разбор предусмотрен для размещения решений на стенде, так как разобрать все задачи на уроке невозможно, да и нецелесообразно.

Математические диктанты и тесты в пособии не предусмотрены, так как на наш взгляд мало эффективны при обучении, но отнимают значительное время от уроков.

В целом, пособие составлено таким образом, чтобы оптимизировать подготовку учителя к уроку и сэкономить его время.

РЕКОМЕНДАЦИИ К ПРОВЕДЕНИЮ УРОКОВ

Разумеется, все изложенное носит исключительно рекомендательный характер. Определяющими факторами являются подготовленность класса, его работоспособность, интерес к изучению алгебры. Поэтому ни одно планирование не может являться догмой. Весь ход урока должен способствовать обучению школьников. На наш взгляд, пусть каждый отдельный школьник лучше усвоит тот материал, который в состоянии понять, чем не поймет ничего. В последнем случае ситуация принимает лавинообразный характер — у учащихся возникает комплекс неполноценности, к выполнению домашнего задания привлекаются все домашние, возникают списывание, подсказки, шпаргалки и т. д.

Другая причина, по которой нельзя создать универсальное поурочное планирование — использование в школах 3–4 различных учебников. При этом даже для одного конкретного учебника предусмотрены несколько различных вариантов обучения (с соответствующим тематическим планированием и различным количеством часов на обучение).

В связи с этим данное пособие позволяет проводить занятия по двум наиболее распространенным учебникам по максимальному варианту (136 часов в год). Содержание уроков является избыточным (в расчете на очень подготовленный, сильный класс). При необходимости часть материала опускается либо излагается достаточно поверхностно. С учетом несобранности и неорганизованности семиклассников желательно иметь в расписании двосменные уроки алгебры. Тем более их желательно иметь при написании контрольных работ и тематических зачетов.

Поурочное планирование включает в себя четыре вида занятий:

- 1) урок на изучение нового материала;
- 2) урок на отработку и закрепление пройденного материала;
- 3) контрольная работа;
- 4) тематический зачет.

Рассмотрим эти виды занятий.

I. Урок на изучение нового материала включает в себя семь этапов.

I. Сообщение темы и цели занятий (~ 1–2 мин). Необходимо донести до учащихся необходимость данной темы (области применения этих знаний) и цель урока (навыки и приемы, которые должны быть усвоены в ходе проведения урока).

II. Изучение нового материала (основные понятия) (~ 15 мин) возможно двумя путями:

1) с помощью подсказок, примеров и наводящих вопросов учителя школьники самостоятельно (при фронтальной работе) приходят к формулировке основных понятий и правила рассматриваемого раздела алгебры. Затем учитель уточняет и корректирует эти результаты. Однако, учитывая, что изучение алгебры начинается именно в седьмом классе и все понятия для учащихся незнакомы, такой путь можно рекомендовать лишь для самых простых тем либо отдельных фрагментов урока;

2) учитель формулирует основные понятия и правила, иллюстрируя их примерами. Такой подход требует меньше времени, но менее эффективен (всегда полезнее самостоятельно решить задачу, чем услышать объяснение ее решения).

III. Контрольные вопросы по изучаемому материалу задает учитель для проверки усвоения и понимания возникающих понятий, терминов и т. д. (~ 5 мин). Вопросы могут задаваться как индивидуально, так и фронтально. Следует обратить внимание именно на понимание понятий, а не на их механическое запоминание. Для этого рекомендуется кроме определения попросить учащегося привести соответствующие примеры. В случае затруднения такие примеры могут привести другие школьники или учитель.

IV. Задание на уроке дает учитель из числа наиболее характерных, типовых задач (~ 15 мин). Задание может выполняться:

1) самостоятельно учащимися всего класса в тетрадях с последующим разбором кем-то из школьников (например, первым выполнившим задание) у доски. При этом желательна активная работа всех учащихся: поиск ошибок в решении на доске, вопросы по решению, другие способы решения и т. д.;

2) в виде диалога учащихся, сидящих за одной партой: решение задания, обмен тетрадями и взаимная проверка решения;

3) в виде работы у доски одного или нескольких школьников.

После выполнения задания возможен как взаимоконтроль учащихся у доски, так и подключение к проверке решения всего класса. Разумеется при этом будет происходить и диалог учителя с отвечающим у доски.

V. Задание на дом дается учителем из числа типовых, характерных задач, аналогичных рассмотренным в классе. Задание должно быть рассчитано на 30–40 минут. Желательно, чтобы учащимися были рассмотрены разные способы решения задачи. Это приводит к активизации мышления школьников, творческому пониманию материала и т. д.

При выполнении домашнего задания необходимо приучить школьников фиксировать непонятый материал: теоретические сведения, нерешенные задачи и т. д. Полезно научить школьников формулировать, что именно им непонятно. Четко сформулированный вопрос – это половина ответа на этот вопрос. Особенно такие навыки понадобятся учащимся в старших классах. Разумеется, все возникающие вопросы и нерешенные задачи необходимо разобрать на ближайшем занятии по математике.

VI. Во многих уроках предусмотрены творческие задания. Эти задания отличаются от приводимых в учебнике – или большей сложностью, или нестандартностью формулировки задания, или новым способом решения. Поэтому рассмотрение подобных заданий очень полезно. В зависимости от подготовленности класса эти задания могут быть рассмотрены:

1) на внеклассных занятиях (дополнительные занятия, кружки, факультативы и т. д.);

2) со всеми учащимися как в качестве задания в классе, так и в качестве домашнего задания;

3) дифференцированно с наиболее подготовленными школьниками или на уроке, или в виде домашнего задания;

4) во время проведения математических боев, олимпиад, недель математики и т. д.

Творческие задания выполняются в пределах отведенного времени на урок.

VII. Подведение итогов урока (~ 1–2 мин) проводится учителем с учетом самостоятельной работы школьников, ответов у доски. Отдельных дополнений, вопросов, комментариев учащихся. За все эти виды деятельности выставляются оценки с их кратким обоснованием.

2. Урок на отработку и закрепление пройденного материала отличается этапом II. Теперь на этом этапе предусмотрено повторение и закрепление пройденного материала (~ 20 мин). Прежде всего, оно включает ответы на вопросы по домашнему заданию. Желательно, чтобы такие ответы давались самими учащимися класса. Вопросы могут включать в себя непонятые определения, термины и другой теоретический материал. По-видимому, возникнет и необходимость разбора нерешенных задач.

В этой части урока желательная максимальная активность всего класса. Школьник, объясняя и комментируя свое решение задачи, лучше усваивает изучаемый материал. Кроме того, его объяснения могут оказаться более удобными для понимания ровесниками, чем объяснения учителя. Ориентировочное время на такую стадию этапа II ~ 5–10 минут.

На второй стадии этого этапа предусмотрен контроль усвоения материала (письменный опрос или самостоятельная работа), на который отводится ~ 10–15 минут.

Письменный опрос содержит теоретический вопрос и 1–2 задачи, аналогичные заданию в классе и домашнему заданию. При проверке ответа на теоретический вопрос следует в первую очередь обращать внимание на понимание, а не на строгость и четкость формулировок (к ним учащиеся придут в старших классах).

Самостоятельная работа включает 2–3 типовых, характерных задачи.

В материалах уроков тесты не содержатся. Это связано с тем, что учащиеся седьмого класса очень часто ошибаются. Тестирование не дает возможности выявить причину ошибки: непонимание темы, невнимательность, пробелы в предыдущем материале, арифметические ошибки и т. д. Поэтому тестирование целесообразно в более старших классах (да и то по определенным темам).

3. По каждой изучаемой теме приводятся одна или две контрольные работы. Они составлены в шести вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – сложнее, варианты 5, 6 – самые сложные).

Вариант содержит 6 задач, из которых две последние чуть сложнее предыдущих. Как правило, задачи вариантов подобны задачам, решаемым в классе и дома. Выбор вариантов может быть сделан или самими учащимися (с учетом их самооценки), или учителем (с учетом успехов школьника).

Оценка контрольной работы может быть выполнена следующим образом: в вариантах 1, 2 за любые пять решенных задач ставится оценка «5», за четыре задачи – оценка «4», за три задачи – оценка «3». Шестая задача дает учащимся некоторую свободу выбора и определенный резерв. При таких же критериях за решение заданий вариантов 3, 4 добавляется 0,5 балла; за решение заданий вариантов 5, 6 – добавляется 1,0 балла (учитывая большую сложность их заданий).

Контрольная работа рассчитана на два урока (на наш взгляд – это оптимальное время на написание работы). Учащиеся седьмого класса еще в достаточной степени несобранны, медлительны, неорганизованы. Поэтому одного урока на проведение контрольной работы недостаточно. При необходимости за счет уменьшения количества задач или за счет некоторого либерализма при проверке контрольная работа может быть проведена и за один урок.

После каждой контрольной работы проводится ее анализ и разбор наиболее сложных задач. Ко всем заданиям вариантов 1–4 приведены ответы, задачи вариантов 5, 6 разобраны. Полезно после контрольной работы вывешивать на стенде в классе разбор заданий всех вариантов. Заметим, что за счет дифференциации самих вариантов и заданий в них, возможна некоторая необъективность оценок за контрольную работу.

4. Чтобы устранить подобную необъективность, дать возможность повышения оценок у учащихся, еще раз повторить и закрепить пройденную тему на последнем занятии, проводится письменный тематический зачет. Ему предшествует урок на повторение данной темы.

Тематический зачет составлен в двух равноценных вариантах. Задания каждого варианта разделяются по сложности на три группы («группа А» – самые простые задачи, «группа В» – более сложные задачи и «группа С» – самые сложные задачи). Каждая задача из «А» оценивается в 1 балл, из «В» – в 2 балла, из «С» – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока «А» можно получить 7 баллов, блока «В» – 8 баллов и блока «С» – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Тематическое планирование учебного материала для учебника Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюка, К.И. Нешкова, С.Б. Суровой «Алгебра 7»

I вариант: 5 час. в I четверти, 3 час. во II–IV четвертях, всего – 120 час.

II вариант: 4 час. в неделю, всего – 136 час¹.

I. Выражения, тождества, уравнения (I вар. – 19 ч, II вар. – 22 ч.)

Выражения (4 ч; 5 ч)

Преобразование выражений (6 ч; 7 ч)

Уравнения с одной переменной (8 ч; 9 ч)

II. Функции (15 ч; 18 ч)

Функции и их графики (6 ч; 7 ч)

Линейная функция (9 ч; 11 ч)

III. Степень с натуральным показителем (18 ч; 21 ч)

Степень и ее свойства (8 ч; 10 ч)

Одночлены (7 ч; 8 ч)

Абсолютная и относительная погрешность (3 ч; 3 ч)

IV. Многочлены (20 ч; 23 ч)

Сумма и разность многочленов (4 ч; 4 ч)

Произведение одночлена и многочлена (7 ч; 8 ч)

Произведение многочленов (9 ч; 11 ч)

V. Формулы сокращенного умножения (20 ч; 23 ч)

Квадрат суммы и квадрат разности (5 ч; 6 ч)

Разность квадратов. Сумма и разность кубов (6 ч; 7 ч)

Преобразование целых выражений (9 ч; 10 ч)

VI. Системы линейных уравнений (19 ч; 19 ч)

Линейные уравнения с двумя переменными и их системы (6 ч; 6 ч)

Решение систем линейных уравнений (13 ч; 13 ч)

Повторение (9 ч; 10 ч)

¹ Поурочное планирование приведено для II варианта.

Поурочные разработки к учебнику Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюка, К.И. Нешкова, С.Б. Суровой

I полугодие

Глава I. Выражения, тождества, уравнения

§ 1. Выражения

Урок 1. Числовые (арифметические) выражения

Цели: ознакомить с числовыми выражениями и основными понятиями; напомнить действия с обыкновенными дробями.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

Запись, составленная из чисел с помощью арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень) и скобок, называется числовым (арифметическим) выражением. В частности, сами числа также можно рассматривать как числовые выражения.

Пример 1

Числовые выражения:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } 5^2 - 3; & \text{б) } (2^3 + 4) : 6; & \text{в) } [3 + 2 \cdot (6 - 3)] : 5; \\ \text{г) } 3; & \text{д) } -2\frac{1}{11}. \end{array}$$

(Попросите учащихся привести свои примеры числовых выражений.)

Очень часто числовые выражения возникают при решении задач с текстовым содержанием.

Пример 2

В саду на даче растут пять яблонь, четыре вишни и три сливы. При сборе урожая в среднем было собрано по тридцать килограмм фруктов с яблони, десять килограмм – с вишни и пятнадцать килограмм – со сливы. Какой урожай фруктов был собран в саду?

Решение

Так как с каждой яблони было собрано тридцать килограмм, то с пя-

ти яблонь собрали $30 \cdot 5$ килограмм фруктов. Так как с каждой вишни собрано десять килограмм, то с четырех вишен собрали $10 \cdot 4$ килограмм фруктов. Так как с каждой сливы собрано пятнадцать килограмм, то с трех слив собрали $15 \cdot 3$ килограмм фруктов. Общий урожай фруктов равен сумме урожаев яблок, вишни и сливы, то есть $30 \cdot 5 + 10 \cdot 4 + 15 \cdot 3$.

Решая задачу, получили числовое выражение $30 \cdot 5 + 10 \cdot 4 + 15 \cdot 3$. Забегая вперед, вычислим это выражение: $30 \cdot 5 + 10 \cdot 4 + 15 \cdot 3 = 150 + 40 + 45 = 235$ килограмм.

Пример 3

Найдите периметр (сумму длин всех сторон) прямоугольника со сторонами четыре сантиметра и шесть сантиметров.



Рис. 1.1

Решение

а) Можно непосредственно посчитать сумму длин сторон прямоугольника. Тогда получаем числовое выражение: $4 + 6 + 4 + 6$ или $6 + 4 + 6 + 4$ (в зависимости от того, с какой стороны подсчитывается сумма длин сторон).

б) Найдём сумму длин меньших сторон $4 \cdot 2$ сантиметров и сумму длин больших сторон $6 \cdot 2$ сантиметров. Тогда сумма длин всех сторон (периметр прямоугольника) описывается числовым выражением $4 \cdot 2 + 6 \cdot 2$.

в) Посчитаем полупериметр прямоугольника и найдём сумму длин меньшей и большей стороны $4 + 6$. Учтём, что прямоугольник имеет две меньших и две больших стороны. Тогда периметр описывается выражением $2 \cdot (4 + 6)$. Периметр равен двадцати сантиметрам.

Таким образом, а) по условию задачи можно составить разные числовые выражения, б) независимо от формы записи выражения результат его вычисления будет один и тот же (учитывая свойства арифметических действий).

Пример 4

Поезд двигался сначала пятьдесят минут со скоростью шестьдесят километров в час, затем остановился на станции на десять минут, потом двигался ещё один час со скоростью сорок километров в час. Найдите среднюю скорость движения поезда.

Решение

По определению средней скорости движения она равна отношению пройденного пути к затраченному на этот путь времени. Вычислим путь

и время движения. Прежде всего учтем, что $50 \text{ мин} = \frac{50}{60} \text{ ч} = \frac{5}{6} \text{ ч}$ и $10 \text{ мин} = \frac{10}{60} \text{ ч} = \frac{1}{6} \text{ ч}$ (перешли к одинаковым единицам измерения времени). В начале движения был пройден путь $60 \cdot \frac{5}{6}$ (км), в конце движения — путь $40 \cdot 1$ (км).

Общий пройденный путь описывается числовым выражением:

$$60 \cdot \frac{5}{6} + 40 \cdot 1 \text{ (км)}.$$

Время, затраченное на этот путь (включая время, затраченное на остановку), описывается числовым выражением: $\frac{5}{6} + \frac{1}{6} + 1$ (ч).

Тогда средняя скорость движения описывается выражением:

$$\frac{60 \cdot \frac{5}{6} + 40 \cdot 1}{\frac{5}{6} + \frac{1}{6} + 1}.$$

Если вычислить это выражение, то получим: $\frac{50 + 40}{2} = 45$ (км/ч).

Число, которое получается в результате выполнения арифметических действий в числовом выражении, называется значением числового выражения. Может оказаться, что в числовом выражении какое-то действие невыполнимо, тогда выражение не имеет смысла. Пока школьникам известно только одно невыполнимое действие — деление на нуль (в дальнейшем появятся и другие действия: извлечение корня четной степени из отрицательных чисел, нахождение логарифма от неположительных чисел и так далее).

Пример 5

Найдем значение числового выражения $\frac{5^2 - 3 \cdot 6}{7}$.

Выполним действия в данном выражении и получим:

$$\frac{5^2 - 3 \cdot 6}{7} = \frac{25 - 18}{7} = \frac{7}{7} = 1.$$

Поэтому значение числового выражения $\frac{5^2 - 3 \cdot 6}{7}$ равно 1.

Пример 6

Числовые выражения $(5^3 - 1) : (15 - 3 \cdot 5)$, $\frac{9^2 - 3 \cdot 5 + 1}{2^3 - 9 + 1}$ не имеют смысла, так как делить на нуль нельзя.

Необходимо вкратце напомнить учащимся о действиях с дробями.

Напомним понятие обыкновенной дроби и ее свойства. Обыкновенной дробью называется число вида $\frac{m}{n}$, где m и n – натуральные чис-

ла. Например: $\frac{4}{5}$; $\frac{17}{18}$; $\frac{26}{3}$; $\frac{1}{8}$ – обыкновенные дроби.

Число m называют числителем, число n – знаменателем дроби. Всякое целое число можно рассматривать как обыкновенную дробь со знаменателем 1. Например: $4 = \frac{4}{1}$; $0 = \frac{0}{1}$; $3 = \frac{3}{1}$.

При действиях с дробями используется основное свойство дроби: если числитель и знаменатель данной дроби умножить или разделить на одно и то же (не равное нулю) число, то получится дробь, равная данной дроби. Например: $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{12}{20}$; $\frac{28}{35} = \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{4}{5}$.

Сокращение дроби: числитель и знаменатель надо разложить на простые множители, найти их наибольший общий делитель (НОД) и поделить числитель и знаменатель на НОД.

Пример 7

Сократим дробь $\frac{105}{147}$. Раскладываем числитель и знаменатель на простые множители: $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ и $147 = 3 \cdot 7 \cdot 7$. Находим НОД чисел 105 и 147: НОД (105, 147) = $3 \cdot 7 = 21$. Используя основное свойство дроби, делим ее числитель и знаменатель на НОД. Получаем: $\frac{105}{147} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{5}{7}$.

Приведение дроби к другому знаменателю: числитель и знаменатель умножают на дополнительный множитель.

Пример 8

Дробь $\frac{5}{7}$ приведем к знаменателю 42. Старый (7) и новый (42) знаменатели отличаются в шесть раз. Поэтому по основному свойству дроби числитель и знаменатель данной дроби умножим на дополнительный множитель 6. Получаем: $\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 6}{7 \cdot 6} = \frac{30}{42}$.

Приведение нескольких дробей к общему знаменателю: надо найти общий знаменатель дробей (он равен наименьшему общему кратному (НОК) знаменателей всех дробей) и привести каждую дробь к этому знаменателю (аналогично примеру 8).

Пример 9

Приведем дроби $\frac{4}{106}$ и $\frac{31}{147}$ к общему знаменателю. Раскладываем знаменатели дробей на простые множители: $106 = 2 \cdot 53$ и $147 = 3 \cdot 7^2$. Находим НОК чисел 106 и 147: $\text{НОК}(106; 147) = 2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 53 = 735$. Число 735 будет общим знаменателем данных дробей. Находим дополнительный множитель для каждой дроби. Для этого поочередно делим общий знаменатель на знаменатель каждой дроби.

Получаем: дополнительный множитель ко второй дроби $\frac{735}{147} = 5$. Умножим числитель и знаменатель каждой дроби на найденный дополнительный множитель. Получаем: $\frac{4}{106} = \frac{4 \cdot 7}{106 \cdot 7} = \frac{28}{735}$ и $\frac{31}{147} = \frac{31 \cdot 5}{147 \cdot 5} = \frac{155}{735}$.

Сложение (вычитание) дробей: складывают (вычитают) дроби с одинаковыми знаменателями. При этом знаменатель суммы (разности) остается прежним, а числители – складываются (вычитаются). Если дроби имеют разные знаменатели, их предварительно приводят к общему знаменателю.

Пример 10

Сложим и вычтем дроби $\frac{4}{106}$ и $\frac{31}{147}$. В предыдущем примере эти дроби уже были приведены к общему знаменателю. Поэтому получаем: $\frac{4}{106} + \frac{31}{147} = \frac{28}{735} + \frac{155}{735} = \frac{28+155}{735} = \frac{183}{735}$.

Полученную дробь можно сократить: $\frac{183}{735} = \frac{3 \cdot 61}{3 \cdot 5 \cdot 7^2} = \frac{61}{5 \cdot 7^2} = \frac{61}{245}$.

Разность данных дробей $\frac{4}{106} - \frac{31}{147} = \frac{28}{735} - \frac{155}{735} = \frac{28-155}{735} = -\frac{127}{735}$.

Напомним еще некоторые понятия.

Дробь, у которой числитель меньше знаменателя, называется правильной. Например: $\frac{1}{7}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{7}{13}$.

Дробь, у которой числитель больше или равен знаменателю, называется неправильной. Например: $\frac{25}{4}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{6}{6}$. Из неправильной дроби можно выделить целую часть. Например: $\frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$; $\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$; $\frac{6}{6} = 1$.

Число, состоящее из целой и дробной части, называется смешанным числом.

В ряде случаев при сложении и вычитании смешанных чисел эти операции удобно проводить отдельно с целыми и дробными частями.

Пример 11

Сложим числа $7\frac{1}{3}$ и $3\frac{1}{6}$. Получаем:

$$7\frac{1}{3} + 3\frac{1}{6} = (7+3) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = 10 + \frac{2+1}{6} = 10 + \frac{3}{6} = 10 + \frac{1}{2} = 10\frac{1}{2}.$$

При умножении дробей получается дробь, числитель которой равен произведению числителей данных дробей, а знаменатель — произведению знаменателей дробей. Если возможно, то полученную дробь надо сократить. При умножении смешанные числа обращают в неправильные дроби.

Пример 12

Умножим числа $\frac{5}{29}$ и $3\frac{13}{15}$. Прежде всего смешанное число $3\frac{13}{15}$ обратим в неправильную дробь $3\frac{13}{15} = 3 + \frac{13}{15} = \frac{3 \cdot 15 + 13}{15} = \frac{58}{15}$. Умножим дроби $\frac{5}{29}$ и $\frac{58}{15}$ и получим: $\frac{5}{29} \cdot \frac{58}{15} = \frac{5 \cdot 58}{29 \cdot 15} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 29}{29 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{2}{3}$.

Два числа называются взаимно обратными, если их произведение равно единице. Например: 7 и $\frac{1}{7}$; $\frac{3}{7}$ и $\frac{7}{3}$; $2\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{5}$.

При делении дробей надо делимое умножить на число, обратное делителю.

Пример 13

Разделим дробь $\frac{17}{35}$ на число $1\frac{2}{49}$. Обратим смешанное число $1\frac{2}{49}$ в неправильную дробь: $1\frac{2}{49} = 1 + \frac{2}{49} = \frac{1 \cdot 49 + 2}{49} = \frac{51}{49}$.

Разделим дроби $\frac{17}{35}$ и $\frac{51}{49}$, получим:

$$\frac{17}{35} : 1\frac{2}{49} = \frac{17}{35} : \frac{51}{49} = \frac{17}{35} \cdot \frac{49}{51} = \frac{17 \cdot 49}{35 \cdot 51} = \frac{17 \cdot 7^2}{5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 17} = \frac{7}{5 \cdot 3} = \frac{7}{15}.$$

III. Задание на уроке

1. Составьте числовые выражения, которые:

- имеют смысл;
- не имеют смысла.

Если выражение имеет смысл, то найдите его значение.

Можно рекомендовать попарную работу (например, соседи по парте): каждый учащийся определяет, имеет ли смысл выражение, записанное соседом, и объясняет почему. Если выражение имеет смысл, то на-

ходит его значение. При использовании скобок в выражении обратите внимание на то, что количество открывающихся и закрывающихся скобок должно быть одинаковым.

2. По текстовой задаче предложите учащимся составить числовое выражение (по аналогии с примерами 4–6) и вычислить его значение.

3. Предложите обратную задачу: по написанному простому числовому выражению составить текстовую задачу. Можно рекомендовать парную работу: соседи пишут выражения и обмениваются тетрадями, после этого составляют задачу по чужому выражению.

4. Выполните действия (сложение и вычитание):

$$\begin{array}{llll} \text{а)} \frac{2}{3} + \frac{4}{5}; & \text{б)} \frac{3}{7} + \frac{5}{7}; & \text{в)} \frac{3}{5} + \frac{4}{7}; & \text{г)} \frac{2}{9} + \frac{3}{5}; \\ \text{д)} 1\frac{2}{3} + 2\frac{1}{4}; & \text{е)} 3\frac{1}{3} + 4\frac{2}{5}; & \text{ж)} \frac{3}{5} - \frac{1}{5}; & \text{з)} \frac{4}{7} - \frac{6}{7}; \\ \text{и)} \frac{5}{7} - \frac{3}{5}; & \text{к)} \frac{7}{9} - \frac{9}{10}; & \text{л)} 4\frac{1}{3} - 3\frac{1}{5}; & \text{м)} 2\frac{1}{4} - 3\frac{1}{2}; \\ \text{н)} 5\frac{1}{6} - 2\frac{1}{4}; & \text{о)} 3\frac{1}{7} - 1\frac{1}{3}. \end{array}$$

5. Выполните действия (умножение, деление, возведение в степень):

$$\begin{array}{llll} \text{а)} \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2}; & \text{б)} \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7}; & \text{в)} \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{9}; & \text{г)} \frac{6}{7} \cdot 1\frac{2}{5}; \\ \text{д)} 2\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{11}; & \text{е)} 3\frac{2}{5} \cdot 1\frac{3}{17}; & \text{ж)} 3^2; & \text{з)} 4^3; \\ \text{и)} \left(\frac{2}{3}\right)^2; & \text{к)} \left(\frac{3}{4}\right)^3; & \text{л)} \left(1\frac{1}{2}\right)^3; & \text{м)} \left(2\frac{1}{3}\right)^2; \\ \text{н)} \frac{3}{5} : \frac{1}{5}; & \text{о)} \frac{2}{15} : \frac{8}{5}; & \text{п)} \frac{5}{8} : \left(-\frac{15}{4}\right); & \text{р)} \left(-1\frac{1}{3}\right) : \left(2\frac{1}{3}\right); \\ \text{с)} 5\frac{1}{3} : \frac{8}{9}; & \text{т)} \left(-3\frac{1}{4}\right) : \left(-5\frac{3}{2}\right); & \text{у)} \left(-4\frac{1}{6}\right) : 5; & \text{ф)} 6 : \left(-1\frac{1}{2}\right). \end{array}$$

IV. Контрольные вопросы (опрос учащихся)

- Что называется числовым выражением?
- В каком случае числовое выражение не имеет смысла?
- Что называется значением числового выражения?
- Какое число называется обыкновенной дробью?
- Основное свойство дроби.
- Как сократить дробь?
- Как привести дроби к общему знаменателю?
- Как складываются (вычитаются) дроби?
- Какая дробь называется правильной? Неправильной?
- Какое число называется смешанным?

- Как умножаются дроби? Смешанные числа?
- Какие числа являются взаимно обратными?
- Как делятся дроби? Смешанные числа?

V. Задание на дом

Выполнить упражнения: № 11, 14, 15, 12, 13, 4, 5, 9 (а, б, д–з).

VI. Творческие задания

Творческие задания можно использовать на уроке или дома.

1. Используя четыре раза цифру 2, составьте выражение, значение которого равно цифрам: 1, 2, 3, ... 9 (если это возможно).

Например:

$$2 : 2 + 2 - 2 = 1,$$

$$2 : 2 + 2 : 2 = 2,$$

$$(2 + 2 + 2) : 2 = 3,$$

$$(2 + 2) + 2 - 2 = 4,$$

$$2 + 2 + 2 : 2 = 5 \text{ и так далее.}$$

2. Установите закономерность и напишите три следующих числа в последовательности чисел:

а) 3; 5; 7; 9; ... (арифметическая прогрессия, каждый член на два больше предыдущего);

б) 2; 5; 8; 11; ... (арифметическая прогрессия, каждый член на три больше предыдущего);

в) 3; 6; 12; 24; ... (геометрическая прогрессия, каждый член в два раза больше предыдущего);

г) 2; 6; 18; 54; ... (геометрическая прогрессия, каждый член в три раза больше предыдущего);

д) 1; 4; 9; 16; ... (квадраты натуральных чисел);

е) 1; 8; 27; 64; ... (кубы натуральных чисел);

ж) 1; 2; 3; 5; 8; ... (каждый член равен сумме двух предыдущих);

з) 1; 3; 4; 7; 11; ... (каждый член равен сумме двух предыдущих).

3. Найдите сумму дробей:

$$а) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100};$$

(Ответ: $\frac{99}{100}$.)

Надо учесть, что $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$; $\frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$; ...;

$$\frac{1}{99 \cdot 100} = \frac{1}{99} - \frac{1}{100}. \text{ Тогда данная сумма}$$

$$S = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{1} - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} \quad (\text{в сумме сокращаются все дроби, кроме первой и последней}).$$

$$б) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 101}.$$

(Ответ: $\frac{50}{101}$.)

Надо учесть, что $\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right)$; $\frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right)$; $\frac{1}{5 \cdot 7} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right)$; ...;

$\frac{1}{99 \cdot 101} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{101} \right)$. Тогда данная сумма

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{101} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{101} \right) = \frac{50}{101}.$$

$$в) \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{98 \cdot 100}.$$

(Ответ: $\frac{49}{200}$.)

Надо учесть, что $\frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right)$; $\frac{1}{4 \cdot 6} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right)$; $\frac{1}{6 \cdot 8} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right)$; ...;

$\frac{1}{98 \cdot 100} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{100} \right)$. Тогда данная сумма

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{98} - \frac{1}{100} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{100} \right) = \frac{49}{200}.$$

4. Может ли дробь, в которой числитель меньше знаменателя, быть равной дроби, в которой числитель больше знаменателя?

(Ответ: Может. Например: $\frac{-3}{6} = \frac{5}{-10}$.)

5. Найдите наименьшее число, которое при делении на 2 дает остаток 1, при делении на 2 – остаток 2, при делении на 5 – остаток 4, при делении на 7 – остаток 6.

Решение

Рассмотрим число, которое на единицу больше данного. Тогда это число будет без остатка делиться на перечисленные числа: 2, 3, 5, 7. Эти числа – простые. Поэтому наименьшее число, которое делится на 2, 3, 5, 7 – произведение этих чисел $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$. Искомое число на единицу меньше, то есть $210 - 1 = 209$.

6. Найдите наименьшее число, которое при делении на 2 дает остаток 1, при делении на 3 – остаток 2, при делении на 4 – остаток 3, при делении на 8 – остаток 7.

Решение

Рассмотрим число, которое на единицу больше данного. Тогда это

число будет без остатка делиться на перечисленные числа: 2, 3, 4, 8. Однако эти числа не взаимно простые. Поэтому наименьшее число, которое делится на 2, 3, 4, 8, равно НОК этих чисел, то есть $\text{НОК}(2, 3, 4, 8) = 3 \cdot 8 = 24$. Искомое число на единицу меньше, то есть $24 - 1 = 23$.

7. Найдите сумму чисел:

а) $1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100$.

(Ответ: 5050.)

Решение

Слагаемые являются членами арифметической прогрессии. Поэтому удобно сгруппировать первое слагаемое с последним, второе – с предпоследним и так далее. Получаем: $S = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \dots = 101 + 101 + \dots + 101 = 101 \cdot 50 = 5050$.

б) $1 + 3 + 5 + \dots + 97 + 99$.

(Ответ: 2500.)

в) $2 + 4 + 6 + \dots + 98 + 100$.

(Ответ: 2550.)

8. Один рыбак поймал 3 рыбы, второй – 5 рыб. Из этих рыб сварили уху. Минус рыбаков проходил прохожий, которого рыбаки пригласили на уху. После того, как уха была съедена рыбаками и прохожим, прохожий дал рыбакам 8 \$ за уху. Как по справедливости рыбаки должны поделить эти деньги?

Решение

Очевидно, что поровну (по 4 \$) делить деньги нельзя, так как рыбаки для ухи дали разное количество рыб. Но нельзя также первому рыбаку дать 3 \$, так как рыбаки и сами ели уху (такой дележ был бы справедливым, если бы рыбаки просто отдали прохожему свою рыбу). На уху было потрачено 8 рыб. Прохожий заплатил за то, что съел сам, то есть за третью часть от 8 рыб. Тогда все 8 рыб стоят в три раза дороже, то есть $8 \cdot 3 = 24$ \$. Значит, одна рыбина стоит 3 \$. Поэтому 3 рыбы первого рыбака стоят $3 \cdot 3 = 9$ \$. Но сам рыбак съел ухи на 8 \$ и ему причитается $9 - 8 = 1$ \$. У второго рыбака 5 рыб стоят $3 \cdot 5 = 15$ \$. Но и этот рыбак съел ухи на 8 \$ и ему причитается $15 - 8 = 7$ \$. Следовательно, справедливый дележ: первому рыбаку 1 \$, второму рыбаку – 7 \$.

VII. Подведение итогов урока

Урок 2. Вычисление числовых выражений (десятичные дроби)

Цель: напомнить действия с десятичными дробями и порядок действий при вычислении выражений.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Что называется числовым выражением?

2) Выполните действия:

а) $1\frac{2}{3} + 3\frac{4}{5}$; б) $2\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{13}$; в) $5\frac{1}{4} : \frac{7}{8}$.

3) В школьном саду с 5 яблонь было собрано по 25 кг фруктов, с 6 слив – по 15 кг и с 8 вишен – по 6 кг. Составьте числовое выражение для нахождения собранного урожая и вычислите этот урожай.

Вариант 2

1) Что называется значением числового выражения?

2) Выполните действия:

а) $5\frac{2}{5} - 2\frac{2}{3}$; б) $3\frac{2}{5} \cdot \frac{10}{17}$; в) $4\frac{1}{5} : \frac{7}{15}$.

3) В школьном саду с 7 яблонь было собрано по 30 кг фруктов, с 5 слив – по 12 кг и с 6 вишен – по 7 кг. Составьте числовое выражение для нахождения собранного урожая и вычислите этот урожай.

III. Изучение нового материала

Правильную дробь, знаменатель которой равен 10, 100, 1000 и так далее, можно записать в виде конечной десятичной дроби. Например:

$$\frac{7}{10} = 0,7; \quad \frac{193}{1000} = 0,193.$$

Таким же образом можно записать смешанное

число или неправильную дробь с таким знаменателем. Например:

$$3\frac{9}{10} = 3,9; \quad \frac{623}{100} = 6\frac{23}{100} = 6,23.$$

Если знаменатель дроби содержит в раз-

ложении на простые множители только числа 2 и 5 в различных степе-

нях, то такую дробь также можно представлять в виде конечной десяти-

чной дроби, выполнив деление «уголком».

Пример 1

Представить обыкновенную дробь $\frac{11}{40}$ в виде десятичной.

Решение

Разложим знаменатель дроби $\frac{11}{40}$ на простые множители $40 = 2^3 \cdot 5$.

Такое разложение содержит только множители 2 и 5. Разделив «уголком» числитель на знаменатель, получим:

$$\begin{array}{r|l} 11 & 40 \\ \hline 80 & 0,275 \\ \hline 300 & \\ \hline 280 & \\ \hline 200 & \\ \hline 200 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

В результате обыкновенная дробь представлена в виде конечной десятичной: $\frac{11}{40} = 0,275$.

Если знаменатель дроби содержит в разложении на простые множители кроме чисел 2 и 5 и другие числа, то такую дробь можно представить в виде бесконечной десятичной периодической дроби.

Пример 2

Представить обыкновенную дробь $\frac{40}{11}$ в виде десятичной.

Разделив «уголком» числитель на знаменатель, получим:

$$\begin{array}{r|l} 40 & 11 \\ \hline 33 & 3,6363... \\ \hline 70 & \\ \hline 66 & \\ \hline 40 & \\ \hline 33 & \\ \hline 70 & \\ \hline 66 & \\ \hline 40 & \end{array}$$

В результате обыкновенная дробь представлена в виде бесконечной десятичной периодической: $\frac{40}{11} = 3,6363... = 3,(\overline{63})$. Период десятичных дробей принято указывать в скобках.

Таким образом, любую обыкновенную дробь можно представить в виде десятичной дроби (конечной или бесконечной периодической). Справедливо также обратное утверждение: любую конечную или бесконечную периодическую десятичную дробь можно представить в виде обыкновенной дроби.

Конечную десятичную дробь сразу можно записать в виде дроби со знаменателем 10, 100 и так далее (и выполнить, если необходимо, сокращение дроби).

Пример 3

Представить дробь 0,128 в виде обыкновенной.

$$\text{Получаем: } 0,128 = \frac{128}{1000} = \frac{16 \cdot 8}{125 \cdot 8} = \frac{16}{125}.$$

Бесконечную десятичную периодическую дробь можно записать в виде обыкновенной по следующему правилу:

1. Чтобы получить числитель дроби, нужно из числа образованного цифрами, стоящими до второго периода, вычесть число, образованное цифрами, стоящими до первого периода.

2. Знаменатель дроби состоит из цифр 9 и 0. Цифра 9 повторяется столько раз, сколько было цифр в периоде, а цифра 0 столько раз, сколько цифр содержится между запятой и первым периодом.

Пример 4

Представить дробь 0,5(12) в виде обыкновенной.

Решение

До второго периода стоит число 512, до первого периода — число 5. Поэтому числитель дроби равен $512 - 5 = 507$. В периоде дроби стоят две цифры. Между запятой и первым периодом содержится одна цифра. Поэтому знаменатель дроби равен 990. Следовательно, дробь

$$0,5(12) = \frac{512 - 5}{990} = \frac{507}{990} = \frac{169 \cdot 3}{330 \cdot 3} = \frac{169}{330}.$$

Аналогично можно представить и другие десятичные дроби в виде обыкновенных дробей или смешанных чисел.

Пример 5

По аналогии с примером 4 получаем:

$$1,(15) = 1 + 0,(15) = 1 + \frac{15 - 0}{99} = 1 + \frac{5}{33} = 1\frac{5}{33};$$

$$2,13(22) = 2 + 0,13(22) = 2 + \frac{1322 - 13}{9900} = 2 + \frac{1309}{9900} = 2\frac{1309}{9900}.$$

Наиболее часто в примерах используются конечные десятичные дроби. Поэтому рассмотрим правила действий с ними.

Правила действий с десятичными дробями:

Сложение и вычитание десятичных дробей выполняют поразрядно. При этом дроби записывают одну под другой, чтобы запятая оказалась под запятой.

Пример 6

Сложить и вычесть дроби 2,136 и 1,24.

$$\begin{array}{r} + 2,136 \\ 1,24 \\ \hline \text{а) } 3,376 \end{array}; \quad \begin{array}{r} 2,136 \\ 1,24 \\ \hline \text{б) } 0,896 \end{array}.$$

Умножение десятичных дробей выполняется, не обращая внимание на запятые. Затем в полученном произведении надо отделить запятой справа столько цифр, сколько их стоит после запятой в обоих множителях вместе.

Пример 7

Умножить дроби 2,13 и 1,2.

Решение

Перемножим сначала натуральные числа 213 и 12.

$$\begin{array}{r} \times 213 \\ 12 \\ \hline + 426 \\ 213 \\ \hline 2556 \end{array}$$

Теперь в полученном числе 2556 отделяем запятой три знака, так как в первом числе (2,13) после запятой два знака, во втором числе (1,2) – один знак. Получаем число 2,556.

При делении десятичных дробей, надо в делимом и делителе перенести запятые вправо на столько цифр, сколько их стоит в делителе после запятой. Затем выполнить деление на натуральное число.

Пример 8

а) Разделить число 3,12 на 2,4.

Очевидно, что $3,12 : 2,4 = 31,2 : 24$. Далее производим деление «уголком».

$$\begin{array}{r} - 31,2 \quad | \quad 24 \\ \underline{24} \\ - 72 \\ \underline{72} \\ 0 \end{array}$$

б) Разделить число 3,12 на 2,2.

Очевидно, что $3,12 : 2,2 = 31,2 : 22$. Далее производим деление «уголком». В результате получаем число 1,4(18).

$$\begin{array}{r} - 31,2 \quad | \quad 22 \\ \underline{22} \\ - 92 \\ \underline{88} \\ - 40 \\ \underline{22} \\ - 180 \\ \underline{176} \\ 40 \end{array}$$

Обратите внимание, что сумма, разность, произведение конечных десятичных дробей также является конечной десятичной дробью. Част-

ное от деления конечных десятичных дробей может быть и конечной десятичной дробью (пример 8 а) и бесконечной периодической десятичной дробью (пример 8 б).

Операции над бесконечными периодическими десятичными дробями выполнить намного сложнее. Самый простой способ решения таких задач: перевести эти дроби в обыкновенные и выполнять действия с обыкновенными дробями.

Пример 9

Вычислите $1,(3) - 0,(6) - 1,(18)$.

Переведем бесконечные периодические десятичные дроби в обыкновенные:

$$1,(3) = 1 + 0,(3) = 1 + \frac{3-0}{9} = 1 + \frac{3}{9} = 1\frac{1}{3};$$

$$0,(6) = \frac{6-0}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3};$$

$$1,(8) = 1 + 0,(18) = 1 + \frac{18-0}{99} = 1 + \frac{2}{11} = 1\frac{2}{11}.$$

Теперь запишем тот же пример, но в обыкновенных дробях и выполним действия:

$$1\frac{1}{3} - \frac{2}{3} - 1\frac{2}{11} = 1\frac{1}{3} - \frac{2}{3} - \frac{13}{11} = \frac{4}{3} - \frac{26}{33} = \frac{4 \cdot 11 - 26}{33} = \frac{44 - 26}{33} = \frac{18}{33} = \frac{6}{11} = 0,(54).$$

Порядок действий в арифметических выражениях:

1. Если выражение содержит скобки, то сначала выполняются все действия над числами, заключенными в скобках, а затем все остальные действия.

2. Сначала выполняют действия третьей ступени (возведение в степень), затем действия второй ступени (умножение и деление) и, наконец, действия первой ступени (сложение и вычитание). При этом действия одной и той же ступени выполняют в том порядке, в котором они записаны.

3. При вычислении дробного выражения выполняются действия в числителе и в знаменателе дроби, и первый результат делится на второй.

Пример 10

Вычислить:
$$\frac{\left(0,5 : 1,25 + \frac{2}{5} : 1\frac{4}{7} - \frac{4}{3} - \frac{5}{11}\right) \cdot 3}{\left(1,5 + \frac{1}{4}\right) : 18\frac{1}{3}}$$

В соответствии с перечисленными правилами порядок действий указан в примере. Выполним эти действия.

$$1) 0,5:1,25=0,4=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}; \quad 2) \frac{7}{5}:1\frac{4}{7}=\frac{7}{5}:\frac{11}{7}=\frac{7}{5}\cdot\frac{7}{11}=\frac{49}{55};$$

$$3) \frac{2}{5}+\frac{49}{55}=\frac{2\cdot 11+49}{55}=\frac{22+49}{55}=\frac{71}{55};$$

$$4) \frac{71}{55}-\frac{3}{11}=\frac{71-3\cdot 5}{55}=\frac{71-15}{55}=\frac{56}{55};$$

$$5) \frac{56}{55}\cdot 3=\frac{168}{55};$$

$$6) 1,5+\frac{1}{4}=1\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1\frac{3}{4}=\frac{7}{4};$$

$$7) \frac{7}{4}:18\frac{1}{3}=\frac{7}{4}:\frac{55}{3}=\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{55}=\frac{21}{220};$$

$$8) \frac{168}{55}:\frac{21}{220}=\frac{168}{55}\cdot\frac{220}{21}=\frac{168\cdot 220}{55\cdot 21}=\frac{8\cdot 21\cdot 4\cdot 55}{55\cdot 21}=8\cdot 4=32.$$

Итак, результатом выполненных действий является число 32.

Пример 11

$$\text{Вычислить: } \frac{\overset{\textcircled{1}}{0,23(7)}+\frac{43}{450}}{\underset{\textcircled{2}}{0,5(61)}-\frac{113}{495}}\cdot\textcircled{3}$$

Порядок действий указан в примере. Прежде всего обратим бесконечные десятичные периодические дроби в обыкновенные. Получаем:

$$0,23(7)=\frac{237-23}{900}=\frac{214}{900}=\frac{107}{450} \text{ и } 0,5(61)=\frac{561-5}{990}=\frac{556}{990}=\frac{278}{495}.$$

Теперь запишем данный пример в обыкновенных дробях и выполним действия:

$$\frac{107}{450}+\frac{43}{450} \\ \frac{278}{495}-\frac{113}{495}$$

$$1) \frac{107}{450}+\frac{43}{450}=\frac{107+43}{450}=\frac{150}{450}=\frac{1}{3};$$

$$2) \frac{278}{495}-\frac{113}{495}=\frac{278-113}{495}=\frac{165}{495}=\frac{1}{3};$$

$$3) \frac{1}{3}:\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{1}=1.$$

Итак, результатом вычислений будет число 1.

Процент. Основные задачи на процент

Процентом называют сотую часть любого числа или величины.

Пример 12

а) 1 % от числа $7\frac{1}{3}$ составляет число $7\frac{1}{3} : 100 = \frac{22}{3} : 100 = \frac{22}{300} = \frac{11}{150}$;

б) 1 % от величины $5 \cdot a$ составляет величину $5 \cdot a : 100 = \frac{5 \cdot a}{100} = \frac{a}{20}$.

Задачи на проценты можно решать составлением пропорции. Если принять целое (b) за 100 %, а его часть (a) — за P %, то получим пропорцию:

целое (b) — 100 %

часть (a) — P %.

Отсюда получаем: $P = \frac{\text{часть}}{\text{целое}} \cdot 100\% = \frac{a}{b} \cdot 100\%$. Из этого равенства

можно выразить любое его составляющее.

Пример 13

Из группы туристов в восемьдесят человек двадцать туристов отправились на рыбалку. Сколько процентов туристов оказались рыбаками?

Решение

Так как целое $b = 80$ (человек), часть $a = 20$ (рыбаков), то

$P = \frac{a}{b} \cdot 100\% = \frac{20}{80} \cdot 100\% = 25\%$. Итак, рыбаками оказались 25 % туристов.

Пример 14

При сушке фруктов испаряется 85 % влаги. Сколько сухих фруктов получается из 200 килограммов свежих?

Решение

Так как при сушке испаряется 85 % влаги, то в сухих фруктах сохраняется $100 - 85 = 15$ % веса свежих фруктов. Таким образом, надо найти часть a (вес сухих фруктов), если известно целое b (вес свежих фруктов) и

$P = 15$ %. Из соотношения $P = \frac{a}{b} \cdot 100\%$ выразим $a = \frac{b \cdot P}{100} = \frac{200 \cdot 15}{100} = 30$ кг.

Итак, из 200 кг свежих фруктов получается 30 кг сухих.

Пример 15

За первый день рабочий сделал восемнадцать деталей, что составляет двадцать процентов всего задания. Сколько деталей должен сделать рабочий?

Решение

Надо найти целое (b), если известна часть ($a = 18$) и $P = 20$ %. Из ра-

венства $P = \frac{a}{b} \cdot 100\%$ выразим $b = \frac{a \cdot P}{100} = \frac{18 \cdot 100\%}{20\%} = 90$. Итак, все задан-

ние составляет девяносто деталей.

IV. Задание на уроке

Выполнить упражнения: № 1 (а, в, д, ж, и, п); 2 (а, в); 3 (а, в); 7 (а, б); 8 (а, г); 16, 17 (а, в).

V. Контрольные вопросы

Запишите числа в виде десятичных дробей:

$$\frac{3}{25}; \frac{47}{40}; \frac{2}{3}; \frac{5}{12}; \frac{79}{60}; 2\frac{5}{18}.$$

Запишите в виде обыкновенных дробей или смешанных чисел: 0,36; 0,125; 5,015; 0,(3); 2,(63); 5,6(21).

- Как конечные десятичные дроби складываются (вычитаются), умножаются, делятся? Какая десятичная дробь (конечная или бесконечная периодическая) будет результатом этих операций?
- Как выполнить операции с бесконечными периодическими десятичными дробями?
- Что называется процентом числа или величины?
- Как найти, сколько процентов P составляет число a от числа b ?

VI. Задание на дом

Выполнить упражнения: № 1 (б, г, е, з, к, м); 2 (б, г); 3 (б, г); 7 (в, г); 8 (б, в); 17 (б, д); 18, 19, 20.

VII. Творческие задания

1. Зарплата увеличилась сначала на 10 %, а затем еще на 20 %. На сколько процентов увеличилась зарплата по сравнению с первоначальной?

Решение

Пусть сначала зарплата составляла 100 \$. Так как 1 % от величины 100 \$ равен сотой части (то есть $\frac{100\$}{100} = 1\$ = 1 \$$, то 10 % составляет величину в десять раз большую (то есть $1 \$ \cdot 10 = 10 \$$).

Следовательно, после первого повышения зарплата стала равной $100 \$ + 10 \$ = 110 \$$.

Рассмотрим второе повышение зарплаты. Так как 1 % от новой зарплаты 110 \$ равен сотой части (то есть $\frac{110\$}{100} = 1,1\$$), то 20 % составляют величину в двадцать раз большую (то есть $1,1 \$ \cdot 20 = 22 \$$). Поэтому после второго повышения зарплата стала равной $110 \$ + 22 \$ = 132 \$$.

По сравнению с первоначальной зарплата увеличилась на $132 \$ - 100 \$ = 32 \$$, что составляет от нее $\frac{32\$}{100\$} \cdot 100\% = 32\%$. Таким образом, зарплата увеличилась на 32 %.

Разумеется, вместо зарплаты в 100 \$ можно было рассмотреть зарплату в a \$. Легко убедиться, что процентное увеличение зарплаты не зависит от величины a .

2. Что больше $a\%$ от числа b или $b\%$ от числа a ?

Решение

Так как 1% от числа b равен $\frac{b}{100}$, то $a\%$ от этого числа составляет:

$$a \cdot \frac{b}{100} = \frac{a \cdot b}{100}. \text{ Так как } 1\% \text{ от числа } a \text{ равен } \frac{a}{100}, \text{ то } b\% \text{ от этого числа}$$

$$\text{составляют } b \cdot \frac{a}{100} = \frac{b \cdot a}{100}. \text{ Очевидно, что } \frac{a \cdot b}{100} = \frac{b \cdot a}{100}.$$

Следовательно, $a\%$ от числа b равны $b\%$ от числа a .

3. Двое рабочих получали одинаковую зарплату. Зарплату первого рабочего сначала увеличили на 20% , а затем понизили на 20% . Зарплату второго рабочего, наоборот, сначала понизили на 20% , а затем увеличили на 20% . Какой рабочий стал получать больше? Как изменилась его зарплата по сравнению с первоначальной?

Решение

Пусть первоначально каждый из рабочих получал a \$. Рассмотрим изменение зарплат рабочих. Зарплата первого рабочего сначала увеличилась на 20% , то есть на $\frac{a}{100} \cdot 20 = \frac{a}{5}$ \$. В результате зарплата равна

$$a + \frac{a}{5} = \frac{6 \cdot a}{5} \text{ \$}. \text{ Затем эта зарплата уменьшилась на } 20\%, \text{ т. е. на}$$

$$\frac{6a \cdot 20}{5 \cdot 100} = \frac{6a}{25} \text{ \$}. \text{ Окончательно зарплата равна } \frac{6 \cdot a}{5} - \frac{6 \cdot a}{25} = \frac{24 \cdot a}{25} \text{ \$}. \text{ Зарплата}$$

второго рабочего сначала уменьшилась на 20% , то есть на $\frac{a}{100} \cdot 20 = \frac{a}{5}$ \$. В результате зарплата равна $a - \frac{a}{5} = \frac{4 \cdot a}{5}$ \$. Затем эта зарплата

увеличилась на 20% , то есть на $\frac{4 \cdot a \cdot 20}{5 \cdot 100} = \frac{4 \cdot a}{25}$ \$. В итоге зарплата

$$\text{равна } \frac{4 \cdot a}{5} + \frac{4 \cdot a}{25} = \frac{24 \cdot a}{25} \text{ \$}.$$

Видно, что зарплаты рабочих стали одинаковыми и уменьшились по сравнению с первоначальной на $a - \frac{24 \cdot a}{25} = \frac{a}{25}$ \$. Эта величина составля-

ет $\frac{\frac{a}{25}}{a} \cdot 100 = 4\%$ от первоначальной, то есть уменьшилась на 4% .

4. В первом бруске весом десять килограмм содержится пятьдесят процентов меди, а во втором, весом пять килограмм, — восемьдесят процентов меди. Бруски сплавляли. Сколько процентов меди содержится в новом сплаве?

Решение

Найдем 1 % от веса первого бруска: $\frac{10}{100}$ кг. Тогда вес меди в первом бруске: $0,1 \cdot 50 = 5$ кг.

Вычислим 1 % от веса второго бруска: $\frac{5}{100} = 0,05$ кг. Вес меди во втором бруске: $0,05 \cdot 80 = 4$ кг.

Вес меди в новом сплаве равен $5 + 4 = 9$ кг (так как медь в него попадет из первого и второго брусков). Вес нового сплава равен сумме веса первого и второго брусков, то есть $10 + 5 = 15$ кг.

Тогда в новом сплаве: $\frac{\text{вес меди}}{\text{вес сплава}} \cdot 100\% = \frac{9}{15} \cdot 100 = 60\%$ меди.

VIII. Подведение итогов урока**Урок 3. Выражения с переменными**

Цель: ознакомить с понятиями алгебраического выражения и значения алгебраического выражения.

Ход урока**I. Сообщение темы и цели урока****II. Повторение и закрепление пройденного материала**

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1) $(3,38 - 2,24) : 1,25$; 2) $\left(8\frac{7}{12} - 2\frac{17}{36}\right) \cdot 2,7 - 4\frac{1}{3} : 0,65$.

2) В сплаве цинка и свинца весом 1600 г содержится 25 % свинца. Найдите:

- а) вес цинка и вес свинца в сплаве (в граммах);
- б) сколько % цинка в сплаве;
- в) какой % составляет вес свинца от веса цинка.

Вариант 2

Выполните действия:

1) $(6,33 - 3,21) : 3,75$; 2) $\left(6\frac{8}{15} - 4\frac{21}{45}\right) \cdot 4,5 - 2\frac{1}{6} : 0,52$.

2) В сплаве меди и олова весом 1400 г содержится 30 % олова.

Найдите:

- а) вес меди и вес олова в сплаве (в граммах);
- б) сколько % меди в сплаве;
- в) какой % составляет вес олова от веса меди.

III. Изучение нового материала

Сначала рассмотрим несколько примеров.

Пример 1

Один телевизор стоит 230 \$. Тогда два телевизора стоят в два раза больше, то есть $230 \cdot 2 = 460$ \$; пять телевизоров стоят в пять раз больше, то есть $230 \cdot 5 = 1150$ \$; a телевизоров стоят в a раз дороже, то есть $230 \cdot a$ \$. С помощью выражения $230 \cdot a$ можно находить стоимость различного числа телевизоров, подставляя различные значения a и выполняя умножение. Так как буква a может принимать различные натуральные значения, то букву a называют переменной, а выражение $230 \cdot a$ — выражением с переменной (или алгебраическим выражением).

Пример 2

Пусть длина одной стороны прямоугольника a см, другой стороны — b см. Найдём периметр прямоугольника. Так как противоположные стороны прямоугольника равны, то длина двух меньших сторон $2 \cdot a$ см, длина двух больших сторон $2 \cdot b$ см.

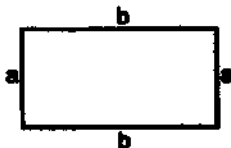


Рис. 1.2

Тогда периметр (сумма длин всех сторон) прямоугольника равен $2 \cdot a + 2 \cdot b$ см. Используя алгебраическое выражение $2 \cdot a + 2 \cdot b$, можно находить периметр прямоугольника со сторонами a см и b см. Буквы a и b могут принимать различные положительные значения и называются переменными.

Пример 3

Поезд двигался два часа со скоростью v_1 км/ч и три часа со скоростью v_2 км/ч. Найдём среднюю скорость движения поезда. По определению средняя скорость движения — отношение всего пройденного пути ко времени, затраченному на этот путь. За первые два часа поезд, двигаясь со скоростью v_1 км/ч, прошёл расстояние $2 \cdot v_1$ км. За следующие три часа поезд, двигаясь со скоростью v_2 км/ч, прошёл расстояние $3 \cdot v_2$ км. Таким образом, было пройдено расстояние $2 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2$ км и на это было затрачено $2 + 3 = 5$ ч. Тогда по определению средняя скорость поезда:

$$\frac{2 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2}{5} \text{ км/ч.}$$

Вновь получили алгебраическое выражение $\frac{2 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2}{5}$ с переменными v_1 и v_2 .

Таким образом, различные алгебраические, геометрические и физические задачи приводят к появлению алгебраических выражений. Возникновение таких выражений подобно возникновению числовых выражений. Поэтому многие понятия у числовых и алгебраических выражений аналогичны.

Запись, составленная из букв и чисел с помощью арифметических действий и скобок, называется алгебраическим выражением. Буквы, входящие в выражение, называются переменными.

Пример 4

а) Запись $2 \cdot a^2 - 3 \cdot b^3 + 5$ – алгебраическое выражение с переменными a и b ;

б) Запись $\frac{(3 \cdot x - 2) \cdot y}{x + y}$ – алгебраическое выражение с переменными x и y .

Значение числового выражения, которое получается при подстановке выбранных значений переменных в алгебраическое выражение, называют значением алгебраического выражения.

Пример 5

Найдем значение выражения $\frac{2 \cdot a + 3 \cdot b}{c}$ при $a = 3$, $b = 4$ и $c = 2$. В

данное алгебраическое выражение $\frac{2 \cdot a + 3 \cdot b}{c}$ подставим данные значения переменных $a = 3$, $b = 4$ и $c = 2$. Получаем числовое выражение. Выполним действия, найдем его значение: $\frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 4}{2} = \frac{6 + 12}{2} = \frac{18}{2} = 9$. Это

число является значением алгебраического выражения для данных значений переменных.

IV. Задание на уроке

Выполнить упражнения: № 31; 33; 35; 36; 38 (а, б, г); 39 (а, в, д, ж); 21 (а); 22; 25 (а).

V. Контрольные вопросы

- Чем отличаются числовые и алгебраические выражения?
- Что называется алгебраическим выражением и переменной?
- Как вычислить значение алгебраического выражения для данных значений переменных? Всегда ли это можно сделать?

VI. Задание на дом

Выполнить упражнения: № 32; 34; 37; 38 (в, д, е, ж, з); 39 (б, г, е, ж); 21 (б); 23; 24 (а); 26.

VII. Творческие задания

1. Одно из положительных чисел увеличили на 10 %, другое – на 50 %. Может ли сумма этих чисел увеличиться на 30 %?

Решение

Пусть первое число x , второе – y . Сумма этих чисел $x + y$. После увеличения первое число равно $x + \frac{x}{100} \cdot 10 = x + 0,1 \cdot x = 1,1 \cdot x$; второе число

равно $y + \frac{y}{100} \cdot 50 = y + 0,5 \cdot y = 1,5 \cdot y$. Тогда сумма этих чисел равна

$1,1 \cdot x + 1,5 \cdot y$. По условию эта величина равна первоначальной сумме, увеличенной на 30 %, то есть

$$(x + y) + \frac{x + y}{100} \cdot 30 = (x + y) + 0,3 \cdot (x + y) = 1,3 \cdot (x + y) = 1,3 \cdot x + 1,3 \cdot y.$$

Получаем равенство $1,1 \cdot x + 1,5 \cdot y = 1,3 \cdot x + 1,3 \cdot y$

или $1,5 \cdot y - 1,3 \cdot x - 1,1 \cdot x$, или $0,2 \cdot y = 0,2 \cdot x$, откуда $x = y$. Таким образом, условия задачи выполнены, если первоначальные числа равны.

2. Докажите на примере трехзначного числа признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9.

Решение

Пусть трехзначное число состоит из a сотен, b десятков и c единиц. Тогда его можно записать в виде $100 \cdot a + 10 \cdot b + c$. Теперь рассмотрим делимость этого числа на перечисленные числа 2, 3, 4, 5, 9.

а) Число делится на 2, если его последняя цифра четная или 0. В данном числе $100 \cdot a + 10 \cdot b + c$ первые два слагаемых $100 \cdot a$ и $10 \cdot b$ при всех a и b делятся на 2. Поэтому, чтобы данное число делилось на 2, надо, чтобы и последнее слагаемое c делилось на 2. Таким образом последняя цифра данного числа четная или ноль.

б) Число делится на 3 (9), если сумма его цифр делится на 3 (9). В данном числе $100 \cdot a + 10 \cdot b + c$ выделим слагаемые, которые делятся на 3 (9), то есть запишем число в виде $(99 \cdot a + 9 \cdot b) + (a + b + c)$. Каждое слагаемое в первой скобке делится на 3 (9). Чтобы данное число делилось на 3 (9), надо чтобы последнее слагаемое $a + b + c$ делилось на 3 (9). Смысл этого слагаемого – сумма цифр данного числа.

в) Число делится на 4, если двузначное число $10 \cdot b + c$, образованное двумя последними цифрами, делится на 4. В данном числе $100 \cdot a + 10 \cdot b + c$ первое слагаемое $100 \cdot a$ делится на 4. Чтобы число делилось на 4, надо чтобы выражение $10 \cdot b + c$ делилось на 4. Смысл выражения $10 \cdot b + c$ – двузначное число, образованное двумя последними цифрами данного числа.

г) Число делится на 5, если его последняя цифра 0 или 5. В данном числе $100 \cdot a + 10 \cdot b + c$ первые два слагаемых делятся на 5 при любых a и b . Поэтому необходимо, чтобы и число c делилось на 5.

Так как c – последняя цифра числа, то c может принимать значения или 0 или 5.

3. При каком значении цифры X пятизначное число $3X541X$ делится на 2, 3, 4, 5, 9?

4. При каком значении цифр X и Y шестизначное число $2X541Y$ делится на 12, 15, 18, 20?

Указание: разложить делители на взаимно простые множители: $12 = 3 \cdot 4$; $15 = 3 \cdot 5$; $18 = 2 \cdot 9$; $20 = 4 \cdot 5$ и использовать соответствующие признаки делимости.

VIII. Подведение итогов урока

Урок 4. Допустимые значения переменных в выражениях. Формулы

Цель: обсудить допустимые значения переменных в алгебраических выражениях, дать понятия о формулах.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1) Что называется алгебраическим выражением и переменной?

2) Было закуплено 5 телевизоров стоимостью a рублей, 7 приемников стоимостью b рублей и 8 магнитофонов стоимостью c рублей. Напишите алгебраическое выражение для вычисления стоимости покупки и найдите его значения при $a = 8200$, $b = 2100$ и $c = 4300$.

3) Найдите значение выражения $2x + 3y - z$, если $x + y = 3$ и $y - z = 2$.

Вариант 2

1) Как вычислить значение алгебраического выражения для данных значений переменных?

2) Было закуплено 7 телевизоров стоимостью a рублей, 6 приемников стоимостью b рублей и 5 магнитофонов стоимостью c рублей. Напишите алгебраическое выражение для вычисления стоимости покупки и найдите его значения при $a = 8300$, $b = 2200$ и $c = 4100$.

3) Найдите значение выражения $3x - 4y - z$, если $x - y = 5$ и $y + z = 3$.

III. Изучение нового материала

С помощью учителя и наводящих вопросов школьники сравнивают выражения из примера 1.

Пример 1

Сравним два алгебраических выражения:

$$а) a^2 - a \cdot b + b^3;$$

$$б) \frac{a^2 - a \cdot b + b^3}{a - 3}.$$

В первом выражении с переменными a и b выполняются операции: возведение в степень, умножение, сложение, вычитание. Все эти действия можно выполнить с любыми числами (или при любых значениях переменных a и b). Поэтому выражение а) имеет смысл при любых значениях a и b или допустимыми значениями для выражения а) являются любые значения переменных a и b . В выражении б) помимо упомянутых операций есть еще одно действие – деление на выражение $a - 3$. Такая операция выполнима только если делитель $a - 3$ не равен нулю (так как делить на нуль нельзя), то есть $a - 3 \neq 0$, откуда $a \neq 3$. Поэтому при любых значениях переменной b и значениях $a \neq 3$ выражение б) имеет смысл, а при $a = 3$ – не имеет смысла. Следовательно, допустимые значения переменных a и b для выражения б) – любые значения b и a , кроме $a = 3$ (то есть $a \neq 3$).

Значения переменных, для которых данное выражение имеет смысл (или выполнимы все действия с этими переменными), называются допустимыми значениями переменных в алгебраическом выражении.

Пример 2

Найдем допустимые значения переменных в алгебраических выражениях:

$$а) 3 \cdot x^3 - 2 \cdot x \cdot y + 5 \cdot y^2; \quad б) \frac{2 \cdot x^2 - 5 \cdot y}{x - 2};$$

$$в) \frac{2 \cdot x^2 - 5 \cdot y}{x - y}; \quad г) \frac{3 \cdot x}{x + 1} - \frac{y^2}{y - 2}.$$

а) В выражении с переменными x и y выполняются операции: возведение в степень, умножение, вычитание и сложение. Такие действия выполнимы для любых значений x и y . Поэтому допустимые значения переменных – любые значения x и y .

б) В выражении с переменными x и y выполняются операции: возведение в степень, умножение, вычитание и деление на величину $(x - 2)$. Это действие возможно, если делитель $x - 2 \neq 0$, то есть $x \neq 2$. Поэтому допустимые значения переменных – любые значения y и любые $x \neq 2$.

в) В выражении помимо других операций есть и деление на величину $(x - y)$. Такое действие возможно, если делитель $x - y \neq 0$, то есть $x \neq y$. Поэтому допустимые значения переменных – любые значения x и y , такие что $x \neq y$ (например, $x = 5$ и $y = 3$ – допустимые значения переменных; $x = 5$ и $y = 5$ – недопустимые значения).

г) В выражение входят деление на величины $(x + 1)$ и $(y - 2)$. Такие операции возможны, если делители $x + 1 \neq 0$ и $y - 2 \neq 0$, откуда $x \neq -1$ и $y \neq 2$. Поэтому допустимые значения переменных – любые значения $x \neq -1$ и любые значения $y \neq 2$.

Равенство, обе части которого являются алгебраическими выражениями, называется формулой.

Пример 3

а) $P = 2 \cdot (a + b)$ – формула периметра прямоугольника (где P – периметр, a и b – длины сторон прямоугольника).

б) $S = a \cdot b$ – формула площади прямоугольника (где S – площадь).

в) $m = 3 \cdot n$ – формула числа, кратного 3 (где m – число, кратное 3, n – любое целое число).

г) $S = v \cdot t$ – формула пройденного пути при равномерном движении (где S – пройденный путь, v – скорость движения, t – время движения).

д) $v = \frac{S}{t}$ – формула средней скорости (где v – средняя скорость, S –

пройденный путь, t – время, затраченное на этот путь).

Остановимся на делении натуральных чисел более подробно, так как с этим понятием связано много задач.

Пример 4

а) Число 28 без остатка делится на 7 и в частном получается 4. Тогда число 28 можно представить в виде: $28 = 7 \cdot 4$, то есть делимое = делитель · частное.

б) Число 36 без остатка делится на 3 и в частном получается число 12. Тогда число 36 можно представить в том же виде: $36 = 3 \cdot 12$, то есть делимое = делитель · частное.

Обобщим результаты этого примера с помощью учащихся. Если число m без остатка делится на число p и в частном получается число n , то его можно представить в виде: $m = p \cdot n$, то есть делимое = делитель · частное.

Пример 5

а) Запишем формулу числа, кратного 5: $m = 5 \cdot n$, так как 5 – делитель, n – некоторое частное (n – целое число).

б) Формула числа, кратного 13: $m = 13 \cdot n$, так как 13 – делитель, n – некоторое частное (n – целое число).

Если в эти формулы подставлять различные натуральные числа n , то будем получать числа m , кратные 5 или 13.

Пример 6

Докажем, что сумма и разность двух чисел, кратных 7, также кратна 7.

Первое число m_1 , кратное 7, запишем в виде $m_1 = 7 \cdot n_1$ (где m_1 – не-

которое частное), второе число m_2 , кратное 7, в виде $m_2 = 7 \cdot n_2$ (где n_2 – частное). Найдем сумму чисел m_1 и m_2 и получим $m_1 + m_2 = 7 \cdot n_1 + 7 \cdot n_2$. Это выражение можно записать в виде $m_1 + m_2 = 7 \cdot (n_1 + n_2)$. Такая запись означает, что число $m_1 + m_2$ делится на 7 и в частном получается число $n_1 + n_2$, то есть сумма чисел m_1 и m_2 кратна 7.

Аналогично найдем разность чисел m_1 и m_2 и получим $m_1 - m_2 = 7 \cdot n_1 - 7 \cdot n_2$. Это выражение запишем в виде $m_1 - m_2 = 7 \cdot (n_1 - n_2)$. Такая запись означает, что число $m_1 - m_2$ делится на 7 и в частном получается число $n_1 - n_2$, то есть разность чисел m_1 и m_2 кратна 7.

Обсудим теперь деление натуральных чисел с остатком.

Пример 7

а) Число 28 делится на число 9 с остатком. При этом в частном получается 3 и в остатке 1. Тогда число 28 можно представить в виде: $28 = 9 \cdot 3 + 1$, то есть делимое = делитель · частное + остаток (при этом остаток меньше делителя).

б) Число 46 делится на число 8 с остатком. При этом в частном получается 5 и в остатке 6. Тогда число 46 можно записать в виде: $46 = 8 \cdot 5 + 6$, то есть делимое = делитель · частное + остаток (при этом остаток меньше делителя).

Обобщим результаты этого примера (с помощью учащихся). Если число m делится на число p и в частном получается число n , в остатке – число r , то его можно представить в виде: $m = p \cdot n + r$ (где $r < p$), то есть делимое = делитель · частное + остаток (при этом остаток меньше делителя).

Пример 8

а) Запишем формулу нечетного числа $m = 2 \cdot n + 1$ (где n – некоторое частное), так как нечетное число при делении на 2 дает остаток 1.

б) Формула числа, которое при делении на 7 дает остаток 3: $m = 7 \cdot n + 3$ (где n – некоторое частное).

Пример 9

При делении на 8 два числа дают остаток 5. Найти остаток при делении на 8 суммы и разности этих чисел.

Данные числа m_1 и m_2 можно записать в виде: $m_1 = 8 \cdot n_1 + 5$ и $m_2 = 8 \cdot n_2 + 5$ (где n_1 и n_2 – некоторые частные). Найдем сумму этих чисел $m_1 + m_2 = 8 \cdot n_1 + 8 \cdot n_2 + 10$. Так как рассматривается деление на 8, то число 10 представим в виде суммы двух чисел, одно из которых кратно 8,

то есть $10 = 8 + 2$. Тогда число $m_1 + m_2$ запишем в виде $m_1 + m_2 = 8 \cdot n_1 + 8 \cdot n_2 + 8 + 2$. Эта запись означает, что при делении на 8 числа $m_1 + m_2$ в частном получается число $n_1 + n_2 + 1$, а в остатке — число 2.

Найдем разность данных чисел $m_1 - m_2 = 8 \cdot n_1 + 5 - 8 \cdot n_2 - 5 = 8 \cdot n_1 - 8 \cdot n_2$. Представим разность в виде $m_1 - m_2 = 8 \cdot (n_1 - n_2)$. Эта запись означает, что число $m_1 - m_2$ кратно 8 (при этом в частном получается $n_1 - n_2$), то есть остаток равен 0.

IV. Задание на уроке

Выполнить упражнения: № 40 (а–в), 41, 43.

1. Напишите формулу числа, которое при делении на 5 дает остаток:

- а) 0;
- б) 2;
- в) 3.

По этой формуле найдите:

- а) однозначное число;
- б) двузначное число;
- в) трехзначное число.

2. Напишите формулу числа, которое при делении на 11 дает остаток:

- а) 3;
- б) 7;
- в) 10.

По этой формуле найдите три двузначных числа.

3. Докажите, что сумма и разность двух нечетных чисел является числом четным.

V. Контрольные вопросы

— Какие значения переменных в алгебраическом выражении называются допустимыми?

— Найдите допустимые значения выражений:

а) $3 \cdot a^2 + 2 \cdot a \cdot b - b$;

б) $2 \cdot a + \frac{3 \cdot b}{a - 2}$;

в) $2 \cdot a + \frac{b + 1}{a - 1} + \frac{b - 3}{a + 2}$;

г) $2 \cdot a + 3 \cdot b^2 + \frac{a}{a - 2 \cdot b}$.

— Какое равенство называется формулой? Приведите примеры.

— Напишите формулу числа, кратного числу p .

— Напишите формулу числа, которое при делении на число p дает остаток r .

VI. Задание на дом

Выполнить упражнения: № 40 (г–е), 42.

1. Найдите допустимые значения выражений:

а) $2 \cdot a - 3 \cdot a \cdot b + 3 \cdot b^2$;

б) $3 \cdot a^2 + \frac{2 \cdot a + 1}{a - 5}$;

в) $6 \cdot a + \frac{3 \cdot a}{a + 1} - \frac{2 \cdot a + 1}{a - 3} + a^2$;

г) $2 \cdot a^2 + 3 \cdot a \cdot b - \frac{a + b}{a - b}$.

2. Напишите формулу числа кратного 17. По этой формуле найдите:

а) двузначное число;

б) трехзначное число.

3. Напишите формулу числа, которое при делении на 7 дает остаток:

а) 0;

б) 2;

в) 5.

По этой формуле найдите:

а) однозначное число;

б) двузначное число;

в) трехзначное число.

VII. Творческие задания

1. На примере двух чисел кратных числу n докажите, что их сумма, разность и произведение также кратны числу n .

Решение

Пусть числа m_1 и m_2 кратны числу n . Тогда их можно записать в виде $m_1 = n \cdot a_1$ и $m_2 = n \cdot a_2$ (где a_1 и a_2 — некоторые частные). Рассмотрим сумму чисел m_1 и m_2 и получим $m_1 + m_2 = n \cdot a_1 + n \cdot a_2 = n \cdot (a_1 + a_2)$. Эта запись означает, что число $m_1 + m_2$ делится на n (при этом в частном получается число $a_1 + a_2$, то есть сумма данных чисел m_1 и m_2 кратна n). Найдем разность чисел $m_1 - m_2 = n \cdot a_1 - n \cdot a_2 = n \cdot (a_1 - a_2)$. Из этой записи следует, что разность данных чисел кратна n (при этом в частном получается число $a_1 - a_2$). Рассмотрим произведение данных чисел m_1 и m_2 и получим $m_1 \cdot m_2 = n \cdot a_1 \cdot n \cdot a_2 = n \cdot a_1 \cdot n \cdot a_2$. Эта запись означает, что число $m_1 \cdot m_2$ делится на n (при этом в частном получается число $a_1 \cdot n \cdot a_2$), то есть произведение данных чисел m_1 и m_2 кратно n . Вообще говоря, из приведенной записи следует, что произведение данных чисел m_1 и m_2 кратно даже n^2 .

2. Два числа при делении на число n дают одинаковый остаток. Докажите, что разность данных чисел кратна числу n .

Решение

Даны числа m_1 и m_2 , которые при делении на число n дают одинаковый остаток r . Тогда их можно записать в виде $m_1 = n \cdot a_1 + r$ и

$m_1 = n \cdot a_2 + r$ (где m_1 – некоторые частные). Найдем разность данных чисел $m_1 - m_2 = n \cdot a_1 + r - (n \cdot a_2 + r) = n \cdot a_1 + r - n \cdot a_2 - r = n \cdot a_1 - n \cdot a_2 = n \cdot (a_1 - a_2)$. Эта запись означает, что число $n \cdot (a_1 - a_2)$ кратно n (при этом при делении получается частное $a_1 - a_2$). Следовательно, разность данных чисел кратна n .

VIII. Подведение итогов урока

Урок 5. Сравнение значений выражений

Цель: обсудить сравнение значений числовых и алгебраических выражений, дать понятие о неравенствах.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (тест).

Вариант 1

- 1) Укажите допустимые значения переменных для выражения:

$$\frac{2x - 7y + 2}{(x + 3)(y - 2)}.$$

Варианты ответов: а) $x \neq 3, y \neq 2$; б) $x \neq -3, y \neq 2$; в) $x \neq -3, y \neq -2$.

- 2) Напишите формулу числа, которое при делении на 6 дает остаток 4.

Варианты ответов: а) $6n - 4$; б) $4n + 6$; в) $6n + 4$.

- 3) Число a при делении на 7 дает остаток 4. Найдите остаток от деления числа $5a$ на 7.

Варианты ответов: а) 4; б) 3; в) 6.

Вариант 2

- 1) Укажите допустимые значения переменных для выражения:

$$\frac{3x - 4y - 1}{(x - 5)(y + 3)}.$$

Варианты ответов: а) $x \neq 5, y \neq -3$; б) $x \neq 5, y \neq 3$; в) $x \neq -5, y \neq -3$.

- 2) Напишите формулу числа, которое при делении на 8 дает остаток 5.

Варианты ответов: а) $8n - 5$; б) $5n + 8$; в) $8n + 5$.

- 3) Число a при делении на 9 дает остаток 3. Найдите остаток от деления числа $4a$ на 9.

Варианты ответов: а) 5; б) 3; в) 6.

III. Изучение нового материала

Пример 1

Сравним значение числовых выражений $(3^2 - 4) : 5$ и $(2^2 + 6) : 8$.

Прежде всего найдем эти значения: $(3^2 - 4) : 5 = (9 - 4) : 5 = 5 : 5 = 1$ и $(2^2 + 6) : 8 = (4 + 6) : 8 = 10 : 8 = 1,25$. Очевидно, что число 1,25 больше числа 1. Этот результат можно записать в виде неравенства $1,25 > 1$ или $(2^2 + 6) : 8 > (3^2 - 4) : 5$.

Вывод: для любых двух числовых выражений можно установить, равны ли они или какое из них больше, то есть сравнить их. Результат сравнения значений числовых выражений обычно записывают в виде равенства или неравенства.

При сравнении значений алгебраических выражений для разных значений переменных результат может оказаться как различным, так и одинаковым.

Пример 2

Сравним значения алгебраических выражений $2 \cdot a - 3$ и $6 - a$ при $a = 1, 3, 5$. Прежде всего найдем эти значения.

Для $a = 1$ получаем: $2 \cdot a - 3 = -1$ и $6 - a = 5$. Поэтому при $a = 1$ выполнено неравенство $2 \cdot a - 3 < 6 - a$.

При $a = 3$ имеем: $2 \cdot a - 3 = 3$ и $6 - a = 3$. Тогда при $a = 3$ верно равенство $2 \cdot a - 3 = 6 - a$.

Для $a = 5$ получаем: $2 \cdot a - 3 = 7$ и $6 - a = 1$. Поэтому при $a = 5$ выполняется неравенство $2 \cdot a - 3 > 6 - a$.

Пример 3

При всех значениях переменной a верны сравнения:

а) $(a - 2)^2 = a^2 - 4 \cdot a + 4$;

б) $a^2 + 5 > 4 \cdot a$;

в) $4 \cdot a + 2 < a^2 + 7$.

Пока доказать эти сравнения мы не можем, но можно их проверить, например, при $a = 0, 3, 5$.

Иногда необходимо установить, между какими числами (в каких пределах) заключено значение выражения.

Пример 4

При измерении длины отрезка, обнаружили, что его длина больше 17 см и меньше 18 см. Обозначим длину отрезка (в см) буквой l . Тогда результат измерения можно записать в виде неравенств: $l > 17$ и $l < 18$ или $17 < l$ и $l < 18$. Эти неравенства можно объединить в виде двойного неравенства $17 < l < 18$. Это неравенство читают: « l больше 17 и меньше 18». Числа l , удовлетворяющие неравенству $17 < l < 18$, можно изобразить на

координатной прямой. Любое число l , расположенное на заштрихованном промежутке, удовлетворяет неравенству (границы промежутка не включаются).



Рис. 1.3

Пример 5

Измерения длины отрезка показали, что она больше или равна (также говорят «не меньше») 21 см и меньше или равна (говорят «не больше») 22 см. Результат измерений можно записать в виде неравенств: $l \geq 21$ и $l \leq 22$ или $21 \leq l$ и $l \leq 22$. Эти неравенства можно объединить в виде двойного неравенства $21 \leq l \leq 22$. Это неравенство читают: « l больше или равна 21 и меньше или равна 22».

Числа l , удовлетворяющие неравенству $21 \leq l \leq 22$, можно изобразить на координатной прямой. Любое число l , расположенное на заштрихованном промежутке, удовлетворяет неравенству (границы промежутка включаются).



Рис. 1.4

Неравенства, составленные с помощью знаков $>$ и $<$ называют строгими неравенствами.

Неравенства, составленные с помощью знаков $\geq$ и $\leq$ называют нестрогими неравенствами.

Нестрогое неравенство является верным, если выполнено или строгое неравенство или равенство.

Пример 6

Числовые неравенства $2,1 \leq 2,1$; $0,8 \leq 3,2$; $6,4 \geq 6,4$; $5,6 \geq 2,8$ являются верными.

IV. Задания на уроке

Выполнить упражнения: № 47 (а, в); 48 (а, в); 49 (а); 51 (а); 52 (а, в); 55 (а, д); 56 (а, в, д); 57 (а, б); 58 (а, г); 62 (а, г); 63 (в).

V. Контрольные вопросы

- Как сравниваются числовые выражения?
- Всегда ли можно сказать, что одно числовое выражение больше или равно другому?
- Как можно сравнить алгебраические выражения?
- Может ли одно алгебраическое выражение быть больше или равно другому при всех значениях переменной? Приведите примеры.

VI. Задание на дом

Выполнить упражнения: № 47 (б, г); 48 (б, г); 49 (б); 51 (б); 52 (б, г); 55 (б, в, е); 56 (б, г, е); 57 (в, г); 58 (б, в, е); 62 (б, в); 63 (г).

VII. Творческие задания

Сравните выражения (не вычисляя их):

$$1. \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} \text{ и } \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \text{ (первое выражение больше,}$$

так как каждое слагаемое в нем больше соответствующего слагаемого во втором выражении: $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, $\frac{1}{4} > \frac{1}{5}$ и так далее).

$$2. \frac{1}{101} + \frac{2}{103} + \frac{3}{105} + \frac{4}{107} + \frac{5}{109} \text{ и } \frac{1}{100} + \frac{2}{102} + \frac{3}{104} + \frac{4}{106} + \frac{5}{108} \text{ (второе}$$

выражение больше, так как каждое слагаемое в нем больше соответствующего слагаемого в первом выражении: $\frac{1}{101} < \frac{1}{100}$, $\frac{2}{103} < \frac{2}{102}$,

$$\frac{3}{105} < \frac{3}{104} \text{ и так далее).}$$

$$3. a + a^2 + a^3 \text{ и } \left(a^2 - \frac{1}{2}\right) + \left(a^2 - \frac{1}{3}\right) + \left(a^3 - \frac{1}{4}\right) \text{ (первое выражение}$$

больше, так как каждое слагаемое в нем больше соответствующего слагаемого во втором выражении: $a > a - \frac{1}{2}$, $a^2 > a^2 - \frac{1}{3}$, $a^3 > a^3 - \frac{1}{4}$ при любых значениях переменной a).

4. $a + a^2 + a^3$ и $(a-1) + (a^2-2) + (a^3+3)$ (выражения равны, так как во второе выражение входит первое выражение, а сумма чисел $-1 - 2 + 3$ равна 0).

VIII. Подведение итогов урока

§ 2. Преобразование выражений

Урок 6. Свойства действий над числами

Цель: напомнить основные свойства сложения и умножения.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

Напомним основные свойства операций сложения и умножения чисел.

1. Переместительное свойство: $a + b = b + a$ и $a \cdot b = b \cdot a$ (для лю-

бых a и b). От перестановки слагаемых сумма чисел не меняется. От перестановки сомножителей произведение чисел не меняется.

Пример 1

На основании переместительного свойства выполняются равенства:

$$а) 3\frac{1}{7} + 2,6 = 2,6 + 3\frac{1}{7};$$

$$б) 3\frac{1}{7} \cdot 2,6 = 2,6 \cdot 3\frac{1}{7};$$

$$в) a^2 + b^2 = b^2 + a^2;$$

$$г) a^2 \cdot b^2 = b^2 \cdot a^2.$$

Разумеется, это свойство выполняется не только для двух чисел, но и любого количества слагаемых или множителей.

Пример 2

На основании переместительного свойства выполняются равенства:

$$а) 3\frac{1}{7} + 2,6 + 1,5 = 3\frac{1}{7} + 1,5 + 2,6 = 2,6 + 3\frac{1}{7} + 1,5 = 2,6 + 1,5 + 3\frac{1}{7} = 1,5 + 3\frac{1}{7} + 2,6 = 1,5 + 2,6 + 3\frac{1}{7};$$

$$б) a \cdot b^2 \cdot c^3 = a \cdot c^3 \cdot b^2 = b^2 \cdot a \cdot c^3 = b^2 \cdot c^3 \cdot a = c^3 \cdot b^2 \cdot a = c^3 \cdot a \cdot b^2.$$

2. Сочетательное свойство: $(a+b)+c=a+(b+c)$ и $a \cdot (b \cdot c)$ и $(a \cdot b) \cdot c$ (для любых чисел a , b и c).

При сложении или умножении чисел их можно произвольным образом объединить в группы.

Пример 3

На основании сочетательного свойства выполняются равенства:

$$а) \left(3\frac{1}{7} + 2,6\right) + 1,5 = 3\frac{1}{7} + (2,6 + 1,5);$$

$$б) (a^2 \cdot b^2) \cdot c = a^2 \cdot (b^2 \cdot c).$$

Это свойство также выполняется для любого количества чисел. Свойства 1 и 2 часто используются для наиболее рационального сложения или умножения чисел.

Пример 4

Вычислим наиболее рациональным способом:

$$а) 3,17 + 6,2 + 1,83 + 3,8 = 3,17 + 1,83 + 6,2 + 3,8 = (3,17 + 1,83) + (6,2 + 3,8) = 5 + 10 = 15;$$

$$б) 2\frac{3}{7} \cdot 5 \cdot \frac{14}{17} = 2\frac{3}{7} \cdot \frac{14}{17} \cdot 5 = \left(2\frac{3}{7} \cdot \frac{14}{17}\right) \cdot 5 = \left(\frac{17}{7} \cdot \frac{14}{17}\right) \cdot 5 = 2 \cdot 5 = 10.$$

3. Распределительное свойство: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ (для любых чисел a , b и c). При умножении числа на сумму чисел данный множитель умножается на каждое слагаемое и полученные произведения складываются.

Пример 5

На основании распределительного свойства выполняются равенства:

$$а) 2,3 \cdot \left(5,1 + 2\frac{1}{3} \right) = 2,3 \cdot 5,1 + 2,3 \cdot 2\frac{1}{3};$$

$$б) a^2 \cdot (b^2 + c) = a^2 \cdot b^2 + a^2 \cdot c.$$

Распределительное свойство выполняется и в том случае, когда в сумму входит любое число слагаемых.

Пример 6

Справедливо равенство $a \cdot (b + c^2 + d) = a \cdot b + a \cdot c^2 + a \cdot d^2$.

Распределительное свойство также используется для рациональных вычислений выражений.

Пример 7

Вычислим рациональным способом:

$$18 \cdot \left(\frac{1}{3} + 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{9} \right) = 18 \cdot \frac{1}{3} + 18 \cdot 1\frac{1}{2} + 18 \cdot 2\frac{1}{9} = 18 \cdot \frac{1}{3} + 18 \cdot \frac{3}{2} + 18 \cdot \frac{19}{9} = \\ = 6 + 9 \cdot 3 + 2 \cdot 19 = 6 + 27 + 38 = 71.$$

Заметим, что операцию вычитания можно заменить операцией сложения, прибавив к уменьшаемому число, противоположное вычитаемому, то есть $a - b = a + (-b)$. Поэтому вычитание можно считать алгебраической суммой чисел. Разумеется, свойства 1–3 выполняются и в этом случае.

Пример 8

Используя свойства 1–3, вычислим:

$$2\frac{1}{3} \cdot \left(1\frac{2}{3} - 2,3 + 6\frac{1}{3} - 2,7 \right) = 2\frac{1}{3} \cdot \left(1\frac{2}{3} + 6\frac{1}{3} - 2,3 - 2,7 \right) = \\ = 2\frac{1}{3} \cdot \left(\left(1\frac{2}{3} + 6\frac{1}{3} \right) + (-2,3 - 2,7) \right) = 2\frac{1}{3} \cdot (8 + (-5)) = 2\frac{1}{3} \cdot (8 - 5) = \frac{7}{3} \cdot 3 = 7.$$

III. Задание на уроке

№ 70 (а, в); 71 (а, в); 72 (а, г); 73 (а); 74 (а); 75 (а, г); 76 (а, в); 77 (а); 78 (а); 79 (а).

IV. Контрольные вопросы

- Запишите формулировки основных свойств сложения и умножения.
- Дайте словесную формулировку свойств сложения и умножения.
- Для каких чисел выполняются основные свойства сложения и умножения?

V. Задание на дом

№ 70 (б, г); 71 (б, г); 72 (б, в); 73 (б); 74 (б); 75 (б, в); 76 (б, г); 77 (б); 78 (б); 79 (б).

VI. Творческие задания**1. Проверьте равенства:**

а) $a - b + c - d = (a + c) - (b + d)$;

б) $(a - 1) + (1 + b) + (c - 1) + (1 + d) = a + b + c + d$;

в) $(a - 1) + (1 - b) + (c - 1) + (1 - d) = a - b + c - d$;

г) $a \cdot (b + c) + a \cdot d = a \cdot (b + c + d)$;

д) $(a - 4) \cdot (b + c) = (a - 4) \cdot b + (a - 4) \cdot c = a \cdot b - 4 \cdot b + a \cdot c - 4 \cdot c$.

Какие свойства сложения и умножения при этом использовали?

2. Вычислите наиболее рациональным способом:

а) $3 + 5 + 8 + 9 + 17 + 15 + 12 + 11$, ответ: 80;

б) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 9 + 18 + 27 + 36 + 45$, ответ: 150;

в) $\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} + \dots + \frac{7}{9} + \frac{8}{9}$, ответ: 4;

г) $\frac{1}{20} + \frac{2}{20} + \frac{3}{20} + \dots + \frac{17}{20} + \frac{18}{20} + \frac{19}{20}$, ответ: 9,5;

д) $1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 99 - 100$, ответ: -50;

е) $(1 + 3 + 5 + \dots + 99) - (2 + 4 + 6 + \dots + 98 + 100)$, ответ: -50.

VII. Подведение итогов урока**Урок 7. Тождества**

Цель: дать понятие тождественно равных выражений и тождества.

Ход урока**I. Сообщение темы и цели урока****II. Повторение и закрепление пройденного материала**

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1) Дайте формулировку (алгебраическую и словесную) переместительного свойства для сложения и умножения.

2) Вычислите наиболее рациональным способом:

а) $7,63 + 2,41 + 2,59 + 2,37$;

б) $\frac{3}{22} \cdot \frac{17}{23} \cdot \frac{44}{3} \cdot \frac{23}{34}$.

3) Вычислите значения выражения: $(3 - a) + (a - 2) + (4 - a) + (a - 1)$.

Вариант 2

1) Дайте формулировку (алгебраическую и словесную) сочетательного свойства для сложения и умножения.

2) Вычислите наиболее рациональным способом:

а) $3,82 + 1,58 + 3,42 + 6,18$;

б) $\frac{7}{11} \cdot \frac{19}{36} \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{18}{19}$.

3) Вычислите значения выражения: $(2-b) + (b+5) + (4-b) + (b-3)$.

III. Изучение нового материала

Пример 1

Найдем значения двух алгебраических выражений x^2 и $5 \cdot x - 6$ при одном и том же значении переменной, например, $x = 1$. Соответственно получаем значения этих выражений: $(1)^2 = 1$ и $5 \cdot 1 - 6 = -1$. Видно, что соответственные значения выражений не равны. Теперь найдем соответственные значения этих выражений при $x = 2$. Получаем значения: $(2)^2 = 4$ и $5 \cdot 2 - 6 = 4$. В этом случае значения выражений равны.

Существуют и такие выражения, соответственные значения которых равны при любых допустимых значениях переменных. Такие выражения называются тождественно равными.

Пример 2

а) По переместительному и сочетательному свойствам сложения выражения $a + b + c$; $b + a + c$; $(a + b) + c$; $a + (b + c)$; $(a + c) + b$ и так далее являются тождественно равными при всех значениях a , b и c .

б) По основному свойству дроби выражения $\frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ и $\frac{a}{b}$ являются тождественно равными при всех допустимых значениях переменных a , b и c , то есть при любых значениях a , b (кроме $b = 0$) и c (кроме $c = 0$) или, короче, при $b \neq 0$ и $c \neq 0$.

в) По основному свойству дроби выражения $\frac{10 \cdot a \cdot b}{5 \cdot (a-1) \cdot (b-2)}$ и $\frac{2 \cdot a \cdot b}{(a-1) \cdot (b-2)}$ являются тождественно равными при $a \neq 1$ и $b \neq 2$.

Равенство, связывающее два тождественно равных выражения, называется тождеством.

Пример 3

Равенства:

а) $a + b + c = a + (b + c)$, б) $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$, в) $\frac{10 \cdot a \cdot b}{5 \cdot (a-1) \cdot (b-2)} = \frac{2 \cdot a \cdot b}{(a-1) \cdot (b-2)}$

являются тождествами при всех допустимых значениях переменных.

Верные числовые равенства также считаются тождествами.

Пример 4

Равенства:

а) $(3^2 - 5) : 4 = 2 - 1$; б) $(1 + 2 + 3 + 4) : 5 = 2^2 - 2$ являются тождествами.**IV. Задание на уроке**

№ 85 (а, б); 86 (а, в); 87 (а, в); 88 (а, б); 90 (а, в); 91 (а); 92 (а); 93 (а, б); 94 (а, б).

V. Контрольные вопросы

- Какие значения алгебраических выражений являются соответственными?
- Могут ли соответственные значения выражений быть а) равными, б) неравными?
- Какие выражения называются тождественно равными? Приведите примеры.
- Какое равенство называется тождеством? Приведите примеры.
- В каком случае числовое равенство будет тождеством? Приведите примеры.

VI. Задание на дом

№ 85 (в, г); 86 (б, г); 87 (б, г); 88 (в, г); 90 (б, г); 91 (б); 92 (б); 93 (в, г); 94 (в, г).

VII. Творческие задания

1. Проверьте, являются ли тождественно равными выражения:

- а) $(a-3) \cdot (a+2)$ и $a^2 - a - 6$;
 б) $(a+3) \cdot (a-2)$ и $a^2 - 2 \cdot a - 6$;
 в) $(a-b) \cdot (a-2 \cdot b)$ и $a^2 - 3 \cdot a \cdot b + 2 \cdot b^2$;
 г) $(a+b) \cdot (a-2 \cdot b)$ и $a^2 + 3 \cdot a \cdot b - 2 \cdot b^2$.

2. При каких допустимых значениях переменных равенства являются тождествами:

- а) $\frac{2 \cdot a \cdot (a-2)}{2 \cdot (a-1) \cdot (a-2)} = \frac{a}{a-1}$; б) $\frac{3 \cdot a \cdot (a+3)}{(a+1) \cdot (a+3)} = \frac{3 \cdot a}{a+1}$;
 в) $\frac{5 \cdot (a-b)}{(a-3) \cdot (a-b)} = \frac{5}{a-3}$; г) $\frac{2 \cdot b \cdot (a-6)}{(a-6) \cdot (a-3 \cdot b)} = \frac{2 \cdot b}{a-3 \cdot b}$.

3. Укажите значения переменных, при которых равны соответствующие значения выражений:

- а) $2 \cdot x + y$ и $x + 3 \cdot y$; б) $3 \cdot x + 3 \cdot y$ и $2 \cdot x + 2 \cdot y$;
 в) $4 \cdot x + y$ и $2 \cdot x + 2 \cdot y$; г) $3 \cdot x - y$ и $2 \cdot x + y$.

VIII. Подведение итогов урока

Урок 8. Тождественные преобразования выражений

Цели: дать понятие о тождественных преобразованиях выражений и напомнить о простейших преобразованиях.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение пройденного материала

III. Основные понятия

Пример 1

Используя распределительное свойство, при всех значениях переменных найдем значение выражения:

$$\begin{aligned} a \cdot (b - c) + b \cdot (c - a) + c \cdot (a - b) &= a \cdot b - a \cdot c + b \cdot c - b \cdot a + c \cdot a - c \cdot b = \\ &= a \cdot b - a \cdot c + b \cdot c - a \cdot b + a \cdot c - b \cdot c = (a \cdot b - a \cdot b) + (-a \cdot c + a \cdot c) + \\ &+ (b \cdot c - b \cdot c) = 0 + 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

При решении задачи было также использовано переместительное свойство: $b \cdot a = a \cdot b$, $c \cdot a = a \cdot c$, $c \cdot b = b \cdot c$ и сочетательное свойство. В результате вычислений и замены выражений тождественно равными выражениями было получено, что при всех значениях переменных a , b и c данное громоздкое выражение $a \cdot (b - c) + b \cdot (c - a) + c \cdot (a - b)$ равно 0.

Замену одного выражения другим, тождественно равным ему выражением, называют тождественным преобразованием или просто преобразованием выражения. Тождественные преобразования выражений с переменными выполняются на основе свойств действий над числами (включая и дроби).

Тождественные преобразования выражений используются при решении многих алгебраических задач. С некоторыми тождественными преобразованиями школьники уже знакомы: приведение подобных членов, раскрытие скобок, сокращение дробей. Напомним правила выполнения подобных преобразований.

1. При приведении подобных членов надо сложить их коэффициенты и результат умножить на общую буквенную часть этих членов.

Пример 2

Используя распределительное свойство, приведем подобные члены в выражении:

$$7 \cdot a \cdot b - 3 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot b - 5 \cdot a \cdot b = a \cdot b \cdot (7 - 3 + 2 - 5) = a \cdot b \cdot 1 = a \cdot b.$$

2. Если перед скобками стоит знак «плюс», то скобки опускают, сохраняя знак каждого слагаемого, входящего в скобки.

Пример 3

Раскроем скобки, используя сочетательное свойство, в выражении:

$$-5 \cdot a^2 + (7 \cdot b - 2 \cdot c^2) = 5 \cdot a^2 + 7 \cdot b - 2 \cdot c^2.$$

3. Если перед скобками стоит знак «минус», то скобки опускают, изменяя знак каждого слагаемого, входящего в скобки, на противоположный.

Пример 4

Раскроем скобки, используя приведенное правило, в выражении:

$$5 \cdot a^2 - (7 \cdot b - 2 \cdot c^3) = 5 \cdot a^2 - 7 \cdot b + 2 \cdot c^3.$$

При этих преобразованиях были использованы распределительное и сочетательное свойства. Второе слагаемое $-(7 \cdot b - 2 \cdot c^3)$ можно записать в виде произведения $(-1) \cdot (7 \cdot b - 2 \cdot c^3)$. Тогда получаем:

$$5 \cdot a^2 - (7 \cdot b - 2 \cdot c^3) = 5 \cdot a^2 + (-1) \cdot (7 \cdot b - 2 \cdot c^3) = 5 \cdot a^2 - 7 \cdot b + 2 \cdot c^3.$$

4. При сокращении дроби ее числитель и знаменатель можно разделить на одно и то же выражение, не равное нулю.

Пример 5

Сократим дробь $\frac{3 \cdot a \cdot (a-5) \cdot (a+3)}{15 \cdot (a-5) \cdot (a+3)}$. Для этого ее числитель и зна-

менатель разделим на выражение $3 \cdot (a-5) \cdot (a+3)$ (при этом $a \neq 5$ и $a \neq -1$) и получим $\frac{a}{5}$. Выражения $\frac{3 \cdot a \cdot (a-5) \cdot (a+3)}{15 \cdot (a-5) \cdot (a+3)}$ и $\frac{a}{5}$ тождественно равны при всех допустимых значениях переменной, то есть при $a \neq 5$ и $a \neq -1$.

IV. Задание для учащихся на уроке

Выполнить упражнения: № 98 (а, в); 100 (а, в); 102; 103 (а, б); 104 (а, в); 106 (а, б); 108 (б); 109 (а); 112 (а, б); 114; 116 (б).

1. Докажите, что при любом значении переменной выражение $3 \cdot (2 \cdot a - 1) - 2 \cdot (3 \cdot a - 5)$ равно постоянной величине.

2. Сократите дроби:

а) $\frac{3 \cdot a}{7 \cdot a};$

б) $\frac{2 \cdot a \cdot (a-3)}{4 \cdot (a-3) \cdot b};$

в) $\frac{6 \cdot (a-3) \cdot (b-1)}{3 \cdot (b-1) \cdot (a+4)}.$

При каких значениях переменных преобразования будут тождественными?

V. Контрольные вопросы

— Что такое тождественное преобразование выражения?

— Как приводятся подобные члены в выражении?

— Как раскрываются скобки со знаком «плюс»?

- Как раскрываются скобки со знаком «минус»?
- Как можно сократить дробь?

VI. Задание на дом

№ 98 (б, г); 100 (б, г); 103 (в, г); 104 (б, г); 107 (б, г); 109 (б); 112 (в, г); 116 (г).

1. Докажите, что выражение $6 \cdot (3 \cdot a + 2) - 9 \cdot (2 \cdot a - 1)$ не зависит от переменной a и равно постоянной величине.

2. Сократите дроби:

а) $\frac{7 \cdot b}{21 \cdot b}$;

б) $\frac{3 \cdot a \cdot (b - c)}{15 \cdot (b - c) \cdot (a + 1)}$;

в) $\frac{5 \cdot (a - 1) \cdot (c + 2)}{15 \cdot (c + 2) \cdot (b - 3)}$.

При каких значениях переменных преобразования будут тождественными?

VII. Творческие задания

1. Раскройте скобки в выражениях и упростите выражение:

а) $a - (a - (a + (a - 1)))$;

б) $c + 2 \cdot (c - 3 \cdot (c - 1))$.

2. Докажите, что выражение не зависит от переменных и равно постоянной величине:

а) $(a - b) \cdot (a + 2 \cdot b) - (a - b) \cdot (a + b) + b \cdot (b - a)$;

б) $(a + 2 \cdot b) \cdot (a + 3 \cdot b) - (a - b) \cdot (a + b) - b \cdot (7 \cdot b + 5 \cdot a)$.

VIII. Подведение итогов урока

Уроки 9–10. Контрольная работа № 1

по теме «Числовые и алгебраические выражения.

Тождественные преобразования выражений»

Контрольная работа составлена в шести вариантах (варианты 1, 2 – самые простые; варианты 5, 6 – самые сложные). Степень сложности меняется не слишком резко. Поэтому можно рекомендовать следующий критерий оценки: при решении вариантов 1, 2 оценка 3 ставится за любые три решенные задачи, оценка 4 – за четыре задачи и оценка 5 – за пять задач. Одна задача дает школьникам некоторую свободу выбора. При тех же критериях оценки за решение вариантов 3, 4 добавляется к набранному баллу дополнительно 0,5 балла; за решение вариантов 5, 6 – дополнительно – 1,0 балла (то есть оценка 5 ставится уже за 4 задачи). Все задачи в варианте примерно равноценны. Может быть несколько тяжелее задачи 5, 6.

Перед проведением контрольной работы учащихся целесообразно ознакомить с критериями оценки и разной сложностью вариантов. Выбор вариантов может быть осуществлен учителем или предоставлен

учащимся (в этом случае предполагается наличие копировальной техники в школе и избыточное количество заданий работы). При наличии такой техники в классе на стенде (после урока-разбора контрольной) может быть вывешено решение всех задач шести вариантов. Разумеется, разобрать такое количество задач на уроке невозможно (да и не нужно).

Контрольная работа рассчитана на два урока. При проведении контрольной работы за один урок необходимо сокращение количества задач.

Вариант I

1. Найдите значение выражения $2\frac{1}{13} \cdot 1\frac{4}{9} - 5\frac{1}{6} : 2\frac{7}{12}$.

2. Вычислите значения выражений $a - 3 \cdot b$ и $2 \cdot a - b$ при $b = -5$ и сравните их.

3. Петя купил пять тетрадей по a рублей и три альбома по b рублей. Составьте выражение для стоимости покупки. Найдите стоимость покупки при $a = 10,3$ и $b = 16,8$.

4. Укажите допустимые значения переменных в выражении $\frac{3 \cdot a - 2 \cdot b}{a + b}$

и найдите его значение при $a = 1,7$ и $b = -1\frac{1}{2}$.

5. Определите знак выражения $13 \cdot x + 17 - (18 \cdot x + 14) + (5 \cdot x - 2)$.

6. Докажите, что сумма трех последовательных натуральных чисел делится на три.

Вариант II

1. Найдите значение выражения $3\frac{2}{11} \cdot 1\frac{4}{7} - 4\frac{1}{3} : 1\frac{1}{12}$.

2. Вычислите значения выражений $2 \cdot a - 3 \cdot b$ и $3 \cdot a - b$ при $a = 8$ и $b = -3$ и сравните их.

3. Оля купила шесть тетрадей по a рублей и четыре альбома по b рублей. Составьте выражение для стоимости покупки. Найдите стоимость покупки при $a = 9,8$ и $b = 14,4$.

4. Укажите допустимые значения переменных в выражении $\frac{4 \cdot a - 3 \cdot b}{a + 2 \cdot b}$

и найдите его значение при $a = 1,2$ и $b = -\frac{1}{2}$.

5. Определите знак выражения $19 \cdot x + 22 - (14 \cdot x + 15) + (5 \cdot x - 8)$.

6. Докажите, что сумма трех последовательных натуральных нечетных чисел делится на три.

Вариант III

1. Найдите 40 % от числа $a = 20 \cdot \left(5\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} - 2\frac{1}{7} : \frac{5}{7} \right) + 3\frac{1}{3} \cdot 1,5$.

2. Вычислите значения выражений $3 \cdot a - 2 \cdot (b + c)$ и $a + 3 \cdot (b + c)$ при $a = 5$ и $b + c = 3$ и сравните их.

3. Поезд ехал два часа со скоростью v_1 км/ч, затем сделал часовую остановку и ехал еще три часа со скоростью v_1 км/ч. Составьте выражение для средней скорости поезда. Найдите среднюю скорость при $v_1 = 50$ и $v_2 = 60$ км/ч.

4. В выражении $\frac{6 \cdot a + 4 \cdot b - 3 \cdot a \cdot b}{3 \cdot a + 2 \cdot b}$ укажите допустимые значения переменных и найдите его значение при $a = \frac{2}{3}$ и $b = \frac{1}{2}$.

5. При каких натуральных значениях переменной a значение выражения $3 \cdot a - 2 \cdot (a - 3 \cdot (a - 1)) - 4$ отрицательно?

6. Одно число при делении на восемь дает остаток три, другое число при делении на четыре дает остаток один. Докажите, что сумма этих чисел делится на четыре.

Вариант IV

1. Найдите 25 % от числа $a = 10 \cdot \left(7\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} - 4\frac{1}{3} : \frac{13}{6} \right) - 5\frac{1}{3} \cdot 4,5$.

2. Вычислите значения выражений $4 \cdot a - 3 \cdot (b + c)$ и $2 \cdot a + 4 \cdot (b + c)$ при $a = 1$ и $b + c = 2$ и сравните их.

3. Поезд ехал три часа со скоростью v_1 км/ч, затем сделал трехчасовую остановку и ехал еще четыре часа со скоростью v_2 км/ч. Составьте выражение для средней скорости поезда. Найдите среднюю скорость при $v_1 = 40$ и $v_2 = 60$ км/ч.

4. В выражении $\frac{4 \cdot a + 6 \cdot b - 3 \cdot a \cdot b}{2 \cdot a + 3 \cdot b}$ укажите допустимые значения переменных и найдите его значение при $a = \frac{1}{2}$ и $b = \frac{4}{3}$.

5. При каких натуральных значениях переменной a значение выражения $5 - 3 \cdot (a - 2 \cdot (a + 1)) - 9 \cdot a$ положительно?

6. Одно число при делении на десять дает остаток три, другое число при делении на пять дает остаток два. Докажите, что сумма этих чисел делится на пять.

Вариант V

1. Представив каждую дробь в виде разности двух дробей, найдите значение выражения $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$.

2. Вычислите значения выражений $3 \cdot a - 5 \cdot b + 6 \cdot c$ и $2 \cdot a - 3 \cdot b + 4 \cdot c$ при $a + 2 \cdot c = 3$ и $b = 4$ сравните их.

3. Катер с собственной скоростью u км/ч движется по реке (скорость течения v км/ч). Катер проплыл пять часов по течению и три часа против течения. Составьте выражение для средней скорости катера. Сравните среднюю и собственную скорости катера.

4. В выражении $\frac{a^2 + 3 \cdot a \cdot b}{3 \cdot b^2 + 2 \cdot a \cdot b}$ укажите допустимые значения переменных и найдите его значение при $a = -b$.

5. При каких натуральных значениях переменной a значение выражения $3 \cdot (0,7 \cdot a + 0,8) + 6 \cdot (a - 2 \cdot (0,4 \cdot a + 1,2))$ отрицательно?

6. Может ли сумма пяти последовательных натуральных чисел быть простым числом?

Вариант VI

1. Представив каждую дробь в виде разности двух дробей, найдите значение выражения $\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{2}{99 \cdot 101}$.

2. Вычислите значения выражений $6 \cdot a = 4 \cdot b - 2 \cdot c$ и $3 \cdot a - 3 \cdot b - c$ при $3 \cdot a - c = 2$ и $b = 3$ и сравните их.

3. Катер с собственной скоростью u км/ч по реке (скорость течения v км/ч). Катер проплыл три часа по течению и пять часов против течения. Составьте выражение для средней скорости катера. Сравните среднюю и собственную скорости катера.

4. В выражении $\frac{a^2 + 2 \cdot a \cdot b}{4b^2 + 3 \cdot a \cdot b}$ укажите допустимые значения переменных и найдите его значение при $a = -b$.

5. При каких натуральных значениях a значение выражения $2 \cdot (0,8 \cdot a + 1,9) + 5 \cdot (a - 7 \cdot (0,3 \cdot a - 0,2))$ положительно?

6. Может ли сумма четырех последовательных натуральных чисел быть простым числом?

Урок 11. Анализ контрольной работы

Ход урока

I. Подведение итогов контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Удобно данные заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи/Итоги	1	2	3	...	6
+	5				
±	1				
-	1				
∅	1				

Обозначения:

- + – число решивших задачу правильно или почти правильно;
- ± – число решивших задачу со значительными погрешностями;
- – число не решивших задачу;
- Ø – число не решавших задачу.

Варианты 1, 2 – 8 учащихся.

2. Типичные ошибки при решении задач.

3. Задачи, вызвавшие наибольшие трудности, и их разбор (учителем или школьниками, решившими эту задачу).

II. Разбор задач вариантов**Вариант I**

1. 1.
2. Первое выражение больше.
3. $5 \cdot a + 3 \cdot b$; 101,9 рублей.
4. $a \neq -b$; 40,5.
5. Знак «плюс».
6. Доказано.

Вариант II

1. 1.
2. Второе выражение больше.
3. $6 \cdot a + 4 \cdot b$; 116,4 рублей.
4. $a \neq -2 \cdot b$; 31,5.
5. Знак «минус».
6. Доказано.

Вариант III

1. 10.
2. Второе выражение больше.
3. $\frac{2 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2}{6}$; 46 км/ч.
4. $a \neq -\frac{2}{3} \cdot b$; $\frac{5}{3}$.
5. $a = 1$.
6. Доказано.

Вариант IV

1. 4.
2. Равны.
3. $\frac{3 \cdot v_1 + 4 \cdot v_2}{10}$; 36 км/ч.

4. $a \neq -\frac{3}{2} \cdot b$; 1,6.

5. $a = 1$.

6. Доказано.

Вариант V

1.

Решение

Представим каждую дробь в виде разности двух дробей. Тогда полу-

$$\begin{aligned} \text{чаем } & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots \\ & \dots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}. \end{aligned}$$

При этом в сумме сокращаются все слагаемые, кроме первого и последнего.

(Ответ: $\frac{99}{100}$.)

2.

Решение

Преобразуем данные выражения, используя свойства арифметических действий, и найдем их при $a + 2 \cdot c = 3$ и $b = 4$. Получаем:

$$\begin{aligned} 3 \cdot a - 5 \cdot b + 6 \cdot c &= 3 \cdot a + 6 \cdot c - 5 \cdot b = (3 \cdot a + 6 \cdot c) - 5 \cdot b = 3 \cdot (a + 2 \cdot c) - 5 \cdot b = \\ &= 3 \cdot 3 - 5 \cdot 4 = 9 - 20 = -11 \text{ и } 2 \cdot a - 3 \cdot b + 4 \cdot c = 2 \cdot a + 4 \cdot c - 3 \cdot b = \\ &= (2 \cdot a + 4 \cdot c) - 3 \cdot b = 2 \cdot (a + 2 \cdot c) - 3 \cdot b = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 4 = 6 - 12 = -6. \end{aligned}$$

При данных значениях переменных второе выражение больше.

(Ответ: второе выражение больше.)

3.

Решение

По определению средняя скорость движения равна отношению пройденного пути к затраченному времени. За пять часов движения по течению со скоростью $u + v$ катер проплыл расстояние $5 \cdot (u + v)$ км и за три часа движения против течения со скоростью $u - v$ он проплыл расстояние $3 \cdot (u - v)$ км. Всего катер проплыл расстояние $5 \cdot (u + v) + 3 \cdot (u - v) = 5 \cdot u + 5 \cdot v + 3 \cdot u - 3 \cdot v = 8 \cdot u + 2 \cdot v$. На этот путь было потрачено время $5 + 3 = 8$ часов. Тогда средняя скорость катера равна

$$\frac{8 \cdot u + 2 \cdot v}{8} = \frac{8 \cdot u}{8} + \frac{2 \cdot v}{8} = u + \frac{v}{4} \text{ больше собственной скорости катера.}$$

(Ответ: $u + \frac{v}{4}$, средняя скорость больше.)

4.

Решение

Для выражения $\frac{a^2 + 3 \cdot a \cdot b}{3 \cdot b^2 + 2 \cdot a \cdot b}$ допустимыми значениями переменных будут такие, при которых знаменатель не равен нулю, то есть $3 \cdot b^2 + 2 \cdot a \cdot b \neq 0$ или $b \cdot (3 \cdot b + 2 \cdot a) \neq 0$, или $b \neq 0$ и $3 \cdot b + 2 \cdot a \neq 0$ (то есть $a \neq -\frac{3}{2} \cdot b$). Поэтому данное выражение имеет смысл при всех зна-

чениях a и b , удовлетворяющих условиям $b \neq 0$ и $a \neq -\frac{3}{2} \cdot b$. Найдем

значение выражения при $a = -b$. Получаем $\frac{(-b)^2 + 3 \cdot (-b) \cdot b}{3 \cdot b^2 + 2 \cdot (-b) \cdot b} =$

$$= \frac{(-b) \cdot (-b) - 3 \cdot b^2}{3 \cdot b^2 - 2 \cdot b^2} = \frac{b^2 - 3 \cdot b^2}{b^2} = \frac{-2 \cdot b^2}{b^2} = -2.$$

(Ответ: $b \neq 0$ и $a \neq -\frac{3}{2} \cdot b$; -2.)

5.

Решение

Сначала упростим данное выражение, поочередно раскрывая скобки (начиная с внутренних) и приводя подобные члены. Получаем:

$$3 \cdot (0,7 \cdot a + 0,8) + 6 \cdot (a - 2 \cdot (0,4 \cdot a + 1,2)) = 2,1 \cdot a + 2,4 + 6 \cdot (a - 0,8 \cdot a - 2,4) =$$

$$= 2,1 \cdot a + 2,4 + 6 \cdot (0,2 \cdot a - 2,4) = 2,1 \cdot a + 2,4 + 1,2 \cdot a - 14,4 = 3,3 \cdot a - 12.$$

Значения этого выражения будут отрицательными при натуральных значениях $a = 1; 2; 3$.

(Ответ: $a = 1; 2; 3$.)

6.

Решение

Пять последовательных натуральных чисел можно записать в виде: $n, n+1, n+2, n+3, n+4$. Их сумма равна:

$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = 5 \cdot n + 10$. Так как в этой сумме каждое слагаемое кратно 5, то их сумма делится на 5, то есть число составное. Поэтому сумма пяти последовательных натуральных чисел не может быть простым числом.

(Ответ: не может.)

Вариант VI

1.

Решение

Представим каждую дробь в виде разности двух дробей. Тогда полу-

$$\text{чаем } \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{2}{99 \cdot 101} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{101} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{101} = 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}.$$

При этом в сумме сокращаются все слагаемые, кроме первого и последнего.

(Ответ: $\frac{100}{101}$.)

2.

Решение

Преобразуем данные выражения, используя свойства арифметических действий, и найдем их при $6 \cdot a + 4 \cdot b - 2 \cdot c = 6 \cdot a - 2 \cdot c + 4 \cdot b = (6 \cdot a - 2 \cdot c) + 4 \cdot b = 2 \cdot (3 \cdot a - c) + 4 \cdot b = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 4 + 12 = 16$ и $3 \cdot a - 3 \cdot b - c = 3 \cdot a - c - 3 \cdot b = (3 \cdot a - c) - 3 \cdot b = 2 - 3 \cdot 3 = 2 - 9 = -7$.

При данных значениях переменных первое выражение больше.

Ответ: первое выражение больше.

3.

Решение

По определению средняя скорость движения равна отношению пройденного пути к затраченному времени. За три часа движения по течению со скоростью $u + v$ катер проплыл расстояние $3 \cdot (u + v)$ км за пять часов движения против течения со скоростью $u - v$ он проплыл расстояние $5 \cdot (u - v)$ км. Всего катер проплыл расстояние $3 \cdot (u + v) + 5 \cdot (u - v) = 3 \cdot v + 5 \cdot u - 5 \cdot v = 8 \cdot u - 2 \cdot v$. На этот путь было потрачено время $3 + 5 = 8$ часов. Тогда средняя скорость катера равна $\frac{8 \cdot u - 2 \cdot v}{8} = \frac{8 \cdot u}{8} - \frac{2 \cdot v}{8} = u - \frac{v}{4}$ меньше собственной скорости катера.

(Ответ: $u - \frac{v}{4}$, средняя скорость меньше.)

4.

Решение

Для выражения $\frac{a^2 + 2 \cdot a \cdot b}{4 \cdot b^2 + 3 \cdot a \cdot b}$ допустимыми значениями переменных будут такие, при которых знаменатель не равен нулю, то есть $4 \cdot b^2 + 3 \cdot a \cdot b \neq 0$ или $b \cdot (4 \cdot b + 3 \cdot a) \neq 0$, или $b \neq 0$ и $4 \cdot b + 3 \cdot a \neq 0$ (то есть $a \neq -\frac{4}{3} \cdot b$). Поэтому данное выражение имеет смысл при всех значениях a и b , удовлетворяющих условиям $b \neq 0$ и $a \neq -\frac{4}{3} \cdot b$. Найдем

значение выражения при $a = -b$. Получаем: $\frac{(-b)^2 + 2 \cdot (-b) \cdot b}{4 \cdot b^2 + 3 \cdot (-b) \cdot b} =$

$$= \frac{(-b) \cdot (-b) - 2 \cdot b^2}{4 \cdot b^2 - 3 \cdot b^2} = \frac{b^2 - 2 \cdot b^2}{b^2} = \frac{-b^2}{b^2} = -1.$$

(Ответ: $b \neq 0$ и $a = -\frac{4}{3} \cdot b; -1$.)

5.

Решение

Сначала упростим данное выражение, поочередно раскрывая скобки (начиная с внутренних) и приводя подобные члены. Получаем: $2 \cdot (0,8 \cdot a + 1,9) + 5 \cdot (a - 7 \cdot (0,3 \cdot a - 0,2)) = 1,6 \cdot a + 3,8 + 5 \cdot (a - 2,1 \cdot a + 1,4) =$
 $= 1,6 \cdot a + 3,8 + 5 \cdot (-1,1 \cdot a + 1,4) = 1,6 \cdot a + 3,8 - 5,5 \cdot a + 7 = 10,8 - 3,9 \cdot a.$

Значения этого выражения будут положительными при натуральных значениях $a = 1; 2$.

(Ответ: $a = 1; 2$.)

6.

Решение

Четыре последовательных натуральных числа можно записать в виде: $n, n+1, n+2, n+3$. Их сумма равна: $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) = 4 \cdot n + 6$. Так как в этой сумме каждое слагаемое кратно 2, то и их сумма делится на 2, то есть число составное. Поэтому сумма четырех последовательных натуральных чисел не может быть простым числом.

(Ответ: не может.)

§ 3. Уравнение с одной переменной

Урок 12. Уравнение и его корни

Цель: дать понятие об уравнении и его корнях.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

Сначала рассмотрим несколько примеров.

Пример 1

Квадрат некоторого числа больше самого числа на шесть. Найти данное число. Пусть неизвестное число равно x , тогда его квадрат равен

x^2 . Число x , увеличенное на шесть, равно $x + 6$. По условию задачи числа x^2 и $x + 6$ равны. Получаем равенство $x^2 = x + 6$, содержащее переменную x . Это равенство будет верным не при всех значениях x , а только при тех значениях x , которые являются ответом задачи. Такое равенство называют уравнением с одной переменной (или с одной неизвестной) x . Для решения задачи надо найти такие числа, которые обращают равенство $x^2 = x + 6$ в верное. Эти числа x называют решениями уравнения или корнями уравнения. Уравнение $x^2 = x + 6$ имеет два корня $x_1 = 3$ и $x_2 = -2$. Действительно, при подстановке значения $x = 3$ в уравнение получаем верное числовое равенство $3^2 = 3 + 6$. При подстановке числа $x = -2$ в уравнение также получаем верное равенство $(-2)^2 = -2 + 6$.

Пример 2

Со склада вывозят груз одинаковыми машинами. Если загрузить шестнадцать машин, то на складе останется восемь тонн груза. Если загрузить четырнадцать машин, то на складе останется тридцать две тонны груза. Найти грузоподъемность одной машины и вес груза на складе. Пусть x (т) – грузоподъемность одной машины. Тогда на шестнадцать машин загружают $16x$ (т) груза. Если к этой величине $16x$ добавим 8 (т), оставшихся на складе, то получим вес груза, находящегося на складе, то есть $16x + 8$. Теперь опишем второе условие задачи. На четырнадцать машин загружают $14x$ (т) груза. Если к этой величине $14x$ добавить 32 (т), оставшихся на складе, то получим вес груза, хранящегося на складе, то есть $14x + 32$. Приравняем выражения для веса груза на складе, которые получаются из первого и второго условий задачи. Получаем равенство $16x + 8 = 14x + 32$. Это равенство называется уравнением с одной неизвестной x . Уравнение $16x + 8 = 14x + 32$ имеет один корень $x = 12$, так как при подстановке этого значения в уравнение получаем верное числовое равенство $16 \cdot 12 + 8 = 14 \cdot 12 + 32$.

Учитывая примеры, сформулируем основные понятия. Равенство между двумя алгебраическими выражениями с одной переменной называют уравнением с одной неизвестной.

Корнем уравнения называют значение переменной, при котором уравнение обращается в верное числовое равенство.

В рассмотренных примерах уравнения имели конечное число корней (два или один). Уравнения также могут иметь бесконечное множество корней или вовсе не иметь корней.

Пример 3

Уравнение $7(x + 3) = 7x + 21$, используя distributive свойство, можно записать в виде: $7x + 7 \cdot 3 = 7x + 21$ или $7x + 21 = 7x + 21$. Видно, что при любом значении x левая часть уравнения равна правой (то есть, по сути, уравнение является тождеством). Поэтому любое число x будет корнем данного уравнения (таких корней бесконечно много).

Пример 4

Уравнение $x^2 + 1 = -x$ корней не имеет, так как при любых значениях x его левая часть $x^2 + 1$ положительна (то есть $x^2 + 1 > 0$), а правая часть — неположительная ($-x < 0$).

Заметим, что одна из частей уравнения может и не содержать переменной.

Пример 5

Равенства:

а) $2x + 7 = 3$; б) $5x - 3 = 0$; в) $3x^2 - 10x = 5$; г) $2x^2 - 3x + 6 = 0$; д) $4 = -x^2 + 3x$ также являются уравнениями (а, б — линейные, в, д — квадратные).

Решить уравнение означает найти все его корни или доказать, что корней нет. Уравнения, которые имеют одни и те же корни, называют равносильными. Уравнения, которые не имеют корней, также считают равносильными.

Пример 6

а) Уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$ и $(x - 2) \cdot (x - 3) = 0$ являются равносильными, так как каждое из этих уравнений имеет одни и те же корни $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$ (проверьте сами).

б) Уравнения $x^2 + 5x = -3$ и $x + 1 = -2$ также являются равносильными, так как каждое из этих уравнений корней не имеет (в них левая часть при любых значениях x величина положительная, а правая часть — отрицательное число).

в) Уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$ и $x + 4 = 6$ не являются равносильными, так как первое уравнение имеет два корня $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$, второе уравнение — только один корень $x = 2$. Несмотря на то, что уравнения имеют один общий корень $x = 2$, они считаются равносильными.

Решение уравнения состоит в его постепенной замене более простыми равносильными уравнениями. При решении уравнений используются свойства:

1. Если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую, изменив его знак, то получится равносильное уравнение.

Пример 7

Уравнения $6x = 3x + 7$ и $6x - 3x = 7$ равносильны (перенесли слагаемое $3x$ в левую часть уравнения).

2. Если обе части уравнения умножить или разделить на число (не равное нулю), то получится равносильное уравнение.

Пример 8

Уравнения $6x = 3x + 7$ и $2x = x + \frac{7}{3}$ равносильны (обе части уравнения разделили на число три).

Эти свойства уравнений основаны на свойствах числовых равенств: если к обеим частям верного равенства прибавить одно и то же число или обе части верного равенства умножить или разделить на одно и то же не равное нулю число, то получится верное равенство.

III. Задание на уроке

№ 122 (а); 123 (а); 125, 127 (а); 128 (а); 129 (а); 130 (а, в); 131 (б).

1. Составьте уравнение, которое имеет корни:

- а) 4;
- б) 4 и 2;
- в) 4; 2 и -3.

2. Равносильны ли уравнения? Объясните почему.

- а) $2(x-3) = 4$ и $2x = 10$; б) $x-3 = 0$ и $(x-3)(x+2) = 0$;
- в) $x-3 = 0$ и $x^2 + 1 = 0$; г) $2x^2 + 3 = 0$ и $x + 7 = 0$.

IV. Контрольные вопросы

- Что называется уравнением? Приведите примеры уравнений.
- Что называется корнем уравнения? Сколько корней имеет квадратное уравнение? Приведите примеры.
- Какие уравнения называются равносильными?
Сформулируйте основные свойства уравнений.

V. Задание на дом

№ 122 (б); 123 (б); 124 (а, б); 126, 127 (б); 128 (б); 129 (б); 130 (б, г); 131 (а, в).

1. Приведите примеры:

- а) равносильных уравнений;
- б) неравносильных уравнений.

2. Докажите, что уравнение не имеет корней:

- а) $3x^2 + 5 = 0$; б) $2x^2 + x = -3$;
- в) $(x-3)^2 = -1$; г) $2x^2 + (x-1)^2 + 5 = 0$.

VI. Подведение итогов урока**Урок 13. Линейное уравнение с одной переменной**

Цель: дать понятие о линейном уравнении и его решении.

Ход урока**I. Сообщение темы и цели урока**

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

- 1) Что называется уравнением с одним неизвестным?
- 2) Составьте уравнение, которое имеет корни -2 и 5 .
- 3) Проверьте, являются ли уравнения равносильными:

а) $x^2 + 3 = 1$ и $|x| - 2 = -3$;

б) $2x - 4 = 0$ и $3x = 6$;

в) $3x + 12 = 0$ и $(x + 4)(x^2 + 1) = 0$.

Объясните почему.

Вариант 2

- 1) Что называется корнем уравнения с одним неизвестным?
- 2) Составьте уравнение, которое имеет корни -3 и 6 .
- 3) Проверьте, являются ли уравнения равносильными:

а) $x^2 + 4 = 2$ и $|x| - 1 = -2$;

б) $3x - 9 = 0$ и $2x = 6$;

в) $2x + 6 = 0$ и $(x + 3)(2x^2 + 1) = 0$.

Объясните почему.

III. Изучение нового материала

Уравнение вида $a \cdot x = b$ (где x – переменная, a и b – некоторые числа) называется линейным уравнением с одной переменной. Отличительная особенность такого уравнения – переменная x входит в уравнение обязательно в первой степени.

Пример 1

Перечисленные уравнения являются линейными, так как имеют вид $a \cdot x = b$:

а) $3 \cdot x = 7$ (где $a = 3$, $b = 7$);

б) $-2 \cdot x = 5$ (где $a = -2$, $b = 5$);

в) $0 \cdot x = -5$ (где $a = 0$, $b = -5$);

г) $0 \cdot x = 0$ (где $a = 0$, $b = 0$).

Все линейные уравнения приводятся к стандартному виду $a \cdot x = b$ с помощью тождественных преобразований.

Пример 2

В уравнении $2 \cdot (3x - 5) = x - 3$ переменная x входит в первой степени. Поэтому уравнение является линейным. Приведем это уравнение к

стандартному виду. В левой части раскроем скобки: $2 \cdot 3x - 2 \cdot 5 = x - 3$ или $6x - 10 = x - 3$.

Перенесем слагаемые, содержащие x , в левую часть уравнения; числа — в правую. Приведем подобные члены. Получаем: $6x - x = 10 - 3$ или $5x = 7$.

Линейное уравнение имеет стандартный вид $a \cdot x = b$ (где $a = 5$, $b = 7$).

Пример 3

Перечисленные уравнения не являются линейными:

а) $3x^2 + 6x + 7 = 0$, так как содержит переменную x во второй степени (слагаемое $3 \cdot x^2$);

б) $6x + 2x = 3$, так как содержит величину x ;

в) $2x^2 + 5x = 4$, так как содержит переменную x в третьей степени.

При решении линейного уравнения $a \cdot x = b$ возможны три следующих случая:

1. Если число $a \neq 0$, то уравнение имеет один корень $x = \frac{b}{a}$.

2. Если числа $a = 0$ и $b = 0$, то уравнение имеет бесконечно много корней (любое число является корнем уравнения).

3. Если числа $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение корней не имеет.

Пример 4

Решим уравнение $2 \cdot (3x - 1) - 4 \cdot (x + 3)$. Приведем это уравнение к стандартному виду. Раскроем скобки в обеих частях уравнения: $2 \cdot 3x - 2 \cdot 1 = 4x + 4 \cdot 3$ или $6x - 2 = 4x + 12$. Слагаемые, зависящие от x , перенесем в левую часть уравнения; числа — в правую, изменяя их знаки на противоположные: $6x - 4x = 2 + 12$. Приведем подобные слагаемые: $2x = 14$. В этом уравнении $a = 2$ (очевидно, $a \neq 0$) и $b = 14$. Уравнение имеет один корень $x = \frac{b}{a} = \frac{14}{2} = 7$.

Пример 5

Решим уравнение $2(3x - 1) - 4(x + 3) - 14 + 2x$. Приводим это уравнение к стандартному виду: $6x - 2 = 4x + 12 - 14 - 2x$ или $6x - 4x - 2x = 2 + 12 - 14$, или $0 \cdot x = 0$ (где $a = 0$, $b = 0$).

Очевидно, что при подстановке любого значения x получаем верное числовое равенство $0 = 0$.

Поэтому любое число является корнем этого уравнения (уравнение имеет бесконечно много корней).

Пример 6

Решим уравнение $2(3x - 1) = 4(x + 3) + 2x$.

Приводим это уравнение к стандартному виду: $6x - 2 = 4x + 12 + 2x$

или $6x - 4x - 2x = 12 + 2$ или $0 \cdot x = 14$ (где $a = 0$, $b = 14$). Очевидно, что при подстановке любого значения x получаем неверное числовое равенство $0 = 14$. Поэтому уравнение корней не имеет.

IV. Задание на уроке

№ 136 (а, б, е); 137 (а, б); 138 (а, г, е); 139 (а, в, д, к); 141 (а, б); 142 (б, г); 144 (а, б).

V. Контрольные вопросы

- Напишите стандартный вид линейного уравнения.
- Какое уравнение является линейным?
- Перечислите возможные случаи при решении линейных уравнений.

VI. Задание на дом

№ 136 (в, е, ж); 137 (в, г, е); 138 (б, д); 139 (б, г, д); 141 (а, г); 142 (а, в); 144 (в, г).

VII. Подведение итогов урока

Урок 14. Решение линейных уравнений

Цель: развить и отработать навыки решения линейных уравнений.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1) Решите уравнения:

- а) $6x - 3 = 4x + 1$;
- б) $2(4x + 2) = 3(2x + 1) + 2x$;
- в) $5(3x + 2) - 4x = 11x + 10$.

2) При каком значении переменной a значение выражения $3a + 7$ больше значения выражения $a + 8$ на 5?

Вариант 2

1) Решите уравнения:

- а) $7x - 5 = 3x + 7$;
- б) $3(3x + 4) = 2(4x + 5) + x$;
- в) $6(2x + 3) - 8x = 4x + 18$.

2) При каком значении переменной a значение выражения $4a + 5$ больше значения выражения $a + 2$ на 6?

III. Задание на уроке

№ 145 (а, б); 147 (а, в); 149 (а, г); 150 (а, б); 151 (а, в); 152 (а, б, д).

IV. Задание на дом

№ 145 (в, г); 146 (а–в); 147 (б, г); 148 (а, г); 149 (б, в); 150 (в, г); 151 (а, д); 152 (в, с).

V. Подведение итогов урока

Уроки 15–16. Решение других типов уравнений с использованием линейных уравнений

Цель: знакомство с другими типами уравнений.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа)

Вариант 1

1) Решите уравнения:

- а) $3x + 5 = 2(x + 1)$;
- б) $3(x + 2) + 2(x - 1) = 4(x + 3)$;
- в) $5(x + 1,2) - 2(1,1x + 1) = 2,3x + 0,4$.

2) При каком значении переменной a значения выражений $5(a + 2)$ и $3a - 4$ совпадают?

3) При каких значениях переменной b значения выражений $3(b - 1)$ и $b + 3$ отличаются в два раза? (Рассмотреть оба случая.)

Вариант 2

1) Решите уравнения:

- а) $4x + 7 = 3(x - 1)$;
- б) $3(x - 1) + 4(x + 1) = 6(x + 2)$;
- в) $3(x - 1,1) + 4(1,2x + 2) = 7,3x + 0,7$.

2) При каком значении переменной a значения выражений $4(a - 3)$ и $2a + 6$ совпадают?

3) При каких значениях переменной b значения выражений $2(b+3)$ и $3b-1$ отличаются в два раза? (Рассмотреть оба случая.)

III. Изучение нового материала

Рассмотрим другие типы уравнений, которые могут быть решены с использованием линейных уравнений.

1. Нелинейные уравнения

Пример 1

Уравнение $x(x-1)=0$ на основании distributivного свойства может быть записано в виде $x^2-x=0$ и является квадратным, так как содержит член x^2 .

Решение квадратных уравнений изучается только в следующем классе. Однако данное уравнение легко решается. Его левая часть представляет собой произведение двух множителей. Это произведение равно нулю, если один из множителей равен нулю. Получаем: $x=0$ или $x-1=0$ (откуда $x=1$). Следовательно, данное уравнение имеет два корня: $x=0$ и $x=1$.

Пример 2

Уравнение $(3x-7)(x^2+1)(2x+3)=0$ является уравнением четвертой степени. Для его решения можно использовать тот же подход, что и в предыдущей задаче. Произведение трех множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем: линейное уравнение $3x-7=0$ (его корень $x=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$), квадратное уравнение $x^2+1=0$ (которое, очевидно, корней не имеет) и линейное уравнение $2x+3=0$ (его корень $x=-\frac{3}{2}=-1,5$). Итак, данное уравнение имеет два корня: $x=2\frac{1}{3}$ и $x=-1,5$.

2. Уравнения с модулем

Прежде всего, напомним определение модуля. Модулем числа (выражения) называется само это число (выражение) a , если оно неотрицательное по знаку число (выражение) $-a$, если число (выражение) отрицательное. Модуль числа (выражения) обозначается символом $|a|$. Тогда определение модуля можно записать короче:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Величина $|a|$ имеет простой геометрический смысл – расстояние от точки a на координатной оси до начала отсчета (точки 0).



Рис. 1.5

В задачах также часто встречается величина $|a - b|$. Ее геометрический смысл – расстояние между точками a и b на координатной оси.



Рис. 1.6

Напомним основные свойства модулей, часто используемые при решении задач:

1. $|a| \geq 0$, то есть модуль любого числа (выражения) – неотрицательное число (выражение). При этом $|a| = 0$ только при $a = 0$.

2. $|a| = |-a|$, то есть модули противоположных чисел (выражений) равны.

3. $|a|^2 = a^2$ то есть квадрат модуля числа (выражения) равен квадрату самого числа (выражения).

4. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, то есть модуль произведения двух чисел (выражений) равен произведению модулей этих чисел (выражений).

5. $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$, то есть модуль частного двух чисел (выражений) равен частному модулей этих чисел (выражений). При этом очевидно, $b \neq 0$.

Теперь рассмотрим уравнения с модулем.

Пример 3

Решим уравнение $|2x - 5| = 0$.

Очевидно, по свойству 1 это равенство выполняется только в том случае, когда подмодульное выражение $2x - 5$ само равно нулю. Получаем линейное уравнение $2x - 5 = 0$ или $2x = 5$, откуда $x = \frac{5}{2} = 2,5$ – единственный корень данного уравнения.

Пример 4

Решим уравнение $|3x + 8| = 1$.

Так как $||1| = 1$, то данное уравнение можно записать в виде $|3x + 8| = |1|$. Так как модули двух величин равны, то сами величины или равны или противоположны по знаку (свойство 2).

Получаем два линейных уравнения:

а) $3x+8=1$ или $3x=-7$ и его корень $x=-\frac{7}{3}=-2\frac{1}{3}$;

б) $3x+8=-1$ или $3x=-9$ и его корень $x=-2\frac{1}{3}$ и $x=-3$.

Пример 5

Решим уравнение $|5x+1|=|3x-9|$.

Вновь используем свойство 2: если модули двух величин равны, то сами величины или равны или противоположны по знаку. Получаем два линейных уравнения:

а) $5x+1=3x-9$ или $5x-3x=-1-9$, или $2x=-10$ и его корень $x=-5$;

б) $5x+1=-(3x-9)$ или $5x+1=-3x+9$, или $5x+3x=-1+9$, или $8x=8$ и его корень $x=1$.

Итак, данное уравнение имеет два корня $x=-5$ и $x=1$.

Пример 6

Решим уравнение $|3x+4|=x$.

Так как модуль некоторого выражения равен величине x , то по свойству 1 эта величина $x \geq 0$. Для таких значений x подмодульное выражение $3x+4 > 0$. Тогда по определению модуля $|3x+4|=3x+4$. Данное уравнение имеет вид $3x+4=x$ или $3x-x=-4$, или $2x=-4$, откуда $x=-2$. Однако это значение не удовлетворяет условию $x \geq 0$ и не является корнем данного уравнения. Итак, данное уравнение корней не имеет.

Пример 7

Решим уравнение $|5x|=5x$.

На основании свойства 4 имеем $|5x|=|5| \cdot |x|=5 \cdot |x|$. Тогда данное уравнение запишем в виде $5 \cdot |x|=5 \cdot x$. Разделим обе части уравнения на число 5 и получим более простое уравнение $|x|=x$. Так как модуль некоторого выражения равен величине x , то по свойству 1 эта величина $x \geq 0$. Для таких значений x подмодульное выражение $x \geq 0$. Тогда по определению модуля $|x|=x$. Данное уравнение имеет вид $x=x$. Очевидно, это равенство выполняется при всех значениях x . Но эти значения x должны удовлетворять условию $x \geq 0$. Поэтому все такие x являются решениями уравнения. Итак, все неотрицательные числа будут решениями данного уравнения.

Более сложные уравнения с модулем пока рассматриваться не будут.

3. Уравнения с параметрами

В некоторые уравнения помимо неизвестной x входит еще одна переменная (параметр), которая может принимать произвольные значения. Как правило, в этих уравнениях требуется найти решение для любого значения параметра или исследовать решение уравнения (при этом иногда само решение находить не надо).

Пример 8

Найти значение параметра a , при котором уравнение $(3a+1) \cdot x = 2a+6$ имеет корень $x=2$.

Так как данное уравнение имеет корень $x=2$, то при подстановке этого значения в уравнение получим верное равенство $(3a+1) \cdot 2 = 2a+6$. Это равенство является линейным уравнением для нахождения нужного значения a . Получаем, раскрывая скобки и решая линейное уравнение: $6a+2=2a+6$ или $6a-2a=6-2$, или $4a=4$, откуда $a=1$. Итак, при $a=1$ данное уравнение имеет корень $x=2$.

Это легко проверить. При подстановке значения $a=1$ в данное уравнение оно имеет вид: $(3 \cdot 1 + 1) \cdot x = 2 \cdot 1 + 6$ или $4x=8$. Корень этого уравнения, действительно, $x=2$.

Пример 9

При каком значении параметра a уравнение $(2a-4) \cdot x + a - 1 = 4a - 7$ имеет три различных корня?

Прежде всего, запишем это линейное уравнение в стандартном виде. Для этого перенесем слагаемые, не зависящие от x , в правую часть уравнения и приведем подобные члены: $(2a-4) \cdot x = 4a - 7a + 1$ или $(2a-4) \cdot x = 3a - 6$. Известно, что линейное уравнение $c \cdot x = b$ имеет более одного корня (бесконечно много корней) только при условии $c=0$ и $b=0$, то есть $2a-4=0$ и $3a-6=0$. Эти линейные уравнения имеют один и тот же корень $a=2$.

Итак, при $a=2$ данное уравнение $(2a-4) \cdot x + a - 1 = 4a - 7$ имеет бесконечно много корней.

Поэтому любые три различных числа, например, числа 5; -2; -7 будут корнями данного уравнения.

Пример 10

Для всех значений параметра a решим уравнение $a \cdot (a-2) \cdot x = 5(a-2)$.

Это линейное уравнение уже записано в стандартном виде $c \cdot x = b$, где $c = (a-2)$ и $b = 5 \cdot (a-2)$.

Далее вспомним три возможных случая решения линейного уравнения.

а) Если $c \neq 0$, то есть $a \cdot (a-2) \neq 0$ или $a \neq 0$ и $a \neq 2$, то уравнение

имеет единственный корень $x = \frac{b}{c} = \frac{5 \cdot (a-2)}{a \cdot (a-2)} = \frac{5}{a}$.

б) Если $c = 0$ при $a = 0$, то найдем значение $b \cdot (a-2) = -10$. Так как $c = 0$ и $b \neq 0$, то в этом случае уравнение решений не имеет.

в) Если $c = 0$ при $a = 2$, то найдем значение $b \cdot (a-2) = 5 \cdot (2-2) = 5 \cdot 0 = 0$. Так как $c = 0$ и $b = 0$, то в этом случае любое число x является корнем уравнения.

Итак, при $a \neq 0$ и $a \neq 2$, $x = \frac{5}{a}$, при $a = 0$ решений нет, при $a = 2$ — любое число.

Пример 11

При каких целых значениях параметра a корнем уравнения $(a-2) \cdot x = 3$ является целое число?

Очевидно, что при $a = 2$ данное линейное уравнение решений не имеет. При $a \neq 0$ уравнение имеет единственный корень $x = \frac{3}{a-2}$. Так как по условию число a — целое, то и число $a-2$ будет целым.

Корень $x = \frac{3}{a-2}$ будет целым числом, если число $a-2$ будет делителем числа 3. Число 3 имеет четыре делителя $\pm 1; \pm 3$. Рассмотрим все возможные случаи: $a-2=1$ (тогда $a=3$), $a-2=-1$ (тогда $a=1$), $a-2=3$ (тогда $a=5$), $a-2=-3$ (тогда $a=-1$). Итак, только при целых значениях a , равных 3; 1; 5; -1, данное уравнение имеет целые корни.

IV. Задания на уроке и на дом

1. Решите уравнения:

а) $ 6x-5 =0$;	б) $ -2x+3 =0$;	в) $ 6x-5 =7$;
г) $ 3x-4 =-1$;	д) $ 2x-1 = 3x+1 $;	е) $ 3-4x = 3x-2 $;
ж) $ -3x =3x$;	з) $ -7x =-7x$;	и) $ 5x-2 =x-1$;
к) $ 3x-1 =x-2$;	л) $ x-3 + 2x-6 =0$;	м) $ 2-x + 2x-4 =0$.

Ответы:

- а) $\frac{5}{6}$; б) $\frac{3}{2}$; в) $-\frac{1}{3}$ и 2; г) корней нет; д) -2 и 0; е) $\frac{5}{7}$ и 1; ж) $x \geq 0$;
 з) $x \leq 0$; и) корней нет; к) корней нет; л) 3; м) 2.

2. Решите уравнения:

а) $(x-5) \cdot (3x+4)=0$;	б) $(4-x) \cdot (2x+5)=0$;
в) $(2x-5)^2 \cdot (x-1)=0$;	г) $(5-4x)^2 \cdot (2-x)=0$;
д) $(3x-1) \cdot (2-4x) \cdot (x+1)^2=0$;	е) $(2-3x) \cdot (5x+2) \cdot (x+2)^2=0$;

ж) $(2 - |3x - 1|) \cdot (x + 5) = 0$;

з) $(3 - |2x - 5|) \cdot (x - 7) = 0$;

и) $(2x^2 + |x| + 3) \cdot (x - 4) = 0$;

к) $(3x^2 + 5 \cdot |x| + 2) \cdot (x + 6) = 0$.

Ответы:

а) $-\frac{4}{3}$ и 5; б) $-2,5$ и 4; в) 1 и 1,5; г) $\frac{5}{4}$ и 2; д) -1 ; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$;

е) -2 ; $-\frac{2}{5}$; $\frac{2}{3}$; ж) -5 ; $-\frac{1}{3}$; 1; з) 1; 4; 7; и) 4; к) -6 .

3. Решите уравнения при всех значениях параметра:

а) $3x = a + 2$;

б) $4x = 6 - 5a$;

в) $a \cdot x = 2 - a$

г) $2ax = 3 + a$;

д) $2 \cdot (a - 3) \cdot x = 6 \cdot (a - 3)$;

е) $3 \cdot a(2 + a) \cdot x = 4 \cdot (2 + a)$;

ж) $(a - 1) \cdot (2a + 4) \cdot x = 3a + 6$;

з) $(a + 2) \cdot (3a - 4) \cdot x = 6a - 8$;

и) $(ax - 2a) \cdot (x - 3) \cdot (4 + x) = 0$;

к) $(ax - 3a) \cdot (x - 2) \cdot (3 + x) = 0$.

Ответы:

а) $\frac{a+2}{3}$;

б) $\frac{6-5a}{4}$;

в) при $a \neq 0$: $x = \frac{2-a}{a}$, при $a = 0$ решений нет;

г) при $a \neq 0$: $x = \frac{3+a}{2a}$, при $a = 0$ решений нет;

д) при $a \neq 3$: $x = 3$, при $a = 3$: $x = 3$, при $a = -2$: $x = \frac{4}{3}$, при $a = -2$ x — любое число;

ж) при $a \neq -2$ и $a \neq 1$: $x = \frac{3}{2(a-1)}$, при $a = -2$: x — любое число,

при $a = 1$ решений нет;

з) при $a \neq -2$ и $a \neq \frac{4}{3}$: $x = \frac{2}{a+2}$, при $a = -2$ — решений нет, при

$a = \frac{4}{3}$: x — любое число;

и) при $a \neq 0$: $x_1 = -4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$; при $a = 0$: x — любое число;

к) при $a \neq 0$: $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$; при $a = 0$: x — любое число;

4. При каких значениях a число 3 является корнем уравнения:

а) $(2a - 1) \cdot x = a - 4$;

б) $(3 - a) \cdot x = 2a + 1$;

в) $(2a - 1) \cdot x = 6a - 3$;

г) $(3 - a) \cdot x = 5 - 3a$.

Ответы:

а) $-\frac{1}{5}$; б) $\frac{8}{5}$; в) при любых a ; г) таких a нет.

5. При каких значениях a два уравнения имеют одинаковый корень:

- а) $3x+7=0$ и $2x-5a=0$; б) $3x+2=0$ и $ax-5=0$;
 в) $2x-a=1$ и $5x=3a+2$; г) $3x-2=5$ и $4x=a-3$.

Найдите этот корень.

Ответы:

- а) при $a = -\frac{14}{15}$: $x = -\frac{7}{3}$; б) при $a = -7,5$: $x = -\frac{2}{3}$;
 в) при $a = 1$: $x = 1$; г) при $a = -\frac{29}{5}$: $x = -\frac{11}{5}$.

6. При каких целых значениях a корнем уравнения будет целое число:

- а) $(2a-1) \cdot x = 3$; б) $(2a+1) \cdot x = 5$;
 в) $(4a+2) \cdot x = 3$; г) $(2a+4) \cdot x = 5$.

Найдите такие корни.

Ответы:

- а) при $a = -1$: $x = -1$, при $a = 0$: $x = 3$, при $a = 2$: $x = 1$;
 б) при $a = -3$: $x = -1$, при $a = 0$: $x = 5$, при $a = -1$: $x = -5$, при $a = 2$: $x = 1$;
 в), г) таких a нет.

7. При каких значениях параметра a уравнение:

- а) $(2a+3) \cdot x - 2a = 3(a+2)$ имеет единственный корень;
 б) $(2a+3) \cdot x - 3a = 3(a+3)$ имеет 11 различных корней;
 в) $(2a+3) \cdot x - 3a = 3(a+2)$ не имеет корней.

Ответы:

- а) при $a \neq -1,5$;
 б) при $a = -1,5$;
 в) при $a = -1,5$.

8. При всех значениях параметра a решите уравнение:

- а) $\frac{x-2}{x-a} = 0$; б) $\frac{2x+a}{x-1} = 0$;
 в) $\frac{2x-3}{x-a} = 1$; г) $\frac{x-3a}{x-2} = 2$.

Ответы:

- а) при $a \neq 2$: $x = 2$; при $a = 2$ – решений нет;
 б) при $a \neq -2$: $x = -\frac{a}{2}$; при $a = -2$ – решений нет;
 в) при $a \neq 1,5$: $x = 3-a$; при $a = 1,5$ – решений нет;
 г) при $a \neq \frac{2}{3}$: $x = 4-3a$; при $a = \frac{2}{3}$ – решений нет.

V. Контрольные вопросы

- Дайте определение модуля числа (выражения).
- Геометрический смысл модуля числа.
- Геометрический смысл выражения $a - b$.
- Основные свойства модуля числа (выражения).

VI. Подведение итогов урока**Урок 17. Решение задач с помощью уравнений**

Цель: дать представление о текстовых задачах и их решении с помощью уравнений.

Ход урока**I. Сообщение темы и цели урока****II. Повторение и закрепление пройденного материала**

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

- 1) Дайте определение модуля числа (выражения).
- 2) Решите уравнения:
 - а) $(3x - 1)(x^2 + 1)(2x + 3) = 0$;
 - б) $|3x + 1| = 2$;
 - в) $(2a + 1)x = 2a + 1$.

Вариант 2

- 1) Геометрический смысл модуля числа.
- 2) Решите уравнения:
 - а) $(5x + 2)(x^2 + 3)(2x - 1) = 0$;
 - б) $|2x + 3| = 5$;
 - в) $(3a + 2)x = 3a + 2$.

III. Изучение нового материала

Для решения текстовых задач используют следующую схему:

- а) обозначают неизвестную в задаче величину буквой;
- б) используя эту букву, записывают другие величины в задаче;
- в) составляют уравнение по условию задачи;
- г) решают полученное уравнение;
- д) находят требуемые по условию задачи величины.

Пример 1

Три бригады рабочих изготавливают игрушки к Новому году. Первая бригада сделала шары. Вторая бригада изготавливает сосульки и сделала их на двенадцать штук больше, чем шаров. Третья бригада изготавливает снежинки и сделала их на пять штук меньше, чем изготовлено шаров и сосулук вместе. Всего было сделано триста семьдесят девять игрушек. Сколько в отдельности изготовлено шаров, сосулук и снежинок?

Обозначим количество шаров буквой x . Тогда число сосулук по условию равно $x + 12$. Шаров и сосулук вместе было изготовлено $x + (x + 12) = x + x + 12 = 2x + 12$. Тогда снежинок было сделано на пять штук меньше, то есть $2x + 12 - 5 = 2x + 7$. Всего было изготовлено $x + (x + 12) + (2x + 7)$ игрушек. По условию было сделано 379 игрушек. Поэтому получаем уравнение $x + (x + 12) + (2x + 7) = 379$.

Это уравнение является линейным. Раскроем скобки и приведем подобные члены: $x + x + 12 + 2x + 7 = 379$. Перенесем число 19 в правую часть и приведем уравнение к стандартному виду: $4x = 379 - 19$ или $4x = 360$. Разделим обе части уравнения на число 4 и найдем $x = 90$. Итак, было изготовлено 90 шаров. Тогда сосулук было сделано $x + 12 = 90 + 12 = 102$ штуки и снежинок $2x + 7 = 2 \cdot 90 + 7 = 187$ штук.

Пример 2

Надо расставить триста восемьдесят книг на три полки так, чтобы на второй полке было на шесть книг больше, чем на первой, а на третьей полке – на девять книг больше, чем на второй. Как это можно сделать?

Пусть на первую полку поставили x книг, тогда на вторую полку – $(x + 6)$ книг и на третью полку – $x + (x + 6) + (x + 15)$ книг. Всего на трех полках будет стоять $x + (x + 6) + (x + 15)$ книг. По условию задачи книг должно быть 380. Получаем уравнение: $x + (x + 6) + (x + 15) = 380$. После приведения подобных членов имеем $3x + 21 = 380$. Запишем это уравнение в стандартном виде: $3x = 380 - 21$ или $3x = 359$, откуда $x = 119\frac{2}{3}$.

Очевидно, что число книг на полке не может быть дробным. Поэтому описанная в задаче расстановка книг на полке невозможна.

IV. Задание на уроке

№ 157, 160, 162, 166, 169.

V. Задание на дом

№ 158, 161, 163, 165, 171.

VI. Подведение итогов урока

Уроки 18–19. Контрольная работа № 2 по теме «Уравнения с одной переменной»

Контрольная работа составлена в шести вариантах (варианты 1, 2 – самые простые; варианты 3, 4 – средней сложности; варианты 5, 6 – самые сложные. Степень сложности меняется не слишком резко. Поэтому можно рекомендовать следующий критерий оценки: при решении вариантов 1, 2 оценка 3 ставится за любые три решенные задачи, оценка 4 – за четыре задачи и оценка 5 – за пять задач. Одна задача дает школьникам некоторую свободу выбора. При тех же критериях оценки за решение вариантов 3, 4 добавляется к набранным баллам дополнительно 0,5 балла; за решение вариантов 5, 6 – дополнительно 1,0 балла (то есть оценка 5 ставится уже за 4 задачи). Все задачи в варианте примерно равноценны. Может быть несколько тяжелее задачи 5, 6.

Перед проведением контрольной работы учащихся целесообразно ознакомить с критериями оценки и разной сложностью вариантов. Выбор вариантов может быть осуществлен учителем или предоставлен самим учащимся (в этом случае предполагается наличие копировальной техники в школе и избыточное количество заданий работы). При наличии такой техники в классе на стенде (после урока-разбора контрольной) может быть вывешено решение всех задач шести вариантов. Разумеется, разобрать такое количество задач на уроке невозможно (да и не нужно).

Вариант I

1. Какие из чисел -3 ; -2 ; 2 ; 3 являются корнями уравнения:

а) $x^2 + 8 = 6x$; б) $|x - 6| = 3 - 2x$.

2. Решите уравнения:

а) $(2x - 1) \cdot (x + 3) = 0$; б) $\frac{3x - 2}{5} = \frac{2x - 3}{4}$.

3. При каком значении переменной разность выражений $6x - 7$ и $2x + 3$ равна 4?

4. При каком значении параметра a уравнение $a \cdot x = 3a + x$ имеет единственный корень? Найдите его.

5. На базе хранится 520 тонн рыбы. При этом трески в 1,5 раза больше, чем наваги. Окуня на 16 тонн больше, чем трески. Сколько тонн трески, наваги и окуня находится на складе?

6. Найдите три последовательных натуральных числа, если утроенная сумма крайних чисел на 145 больше среднего числа.

Вариант II

1. Какие из чисел -3 ; -2 ; 2 ; 3 являются корнями уравнения:

а) $x^2 + 9 = 6x$; б) $|x - 4| = 2 - 4x$.

2. Решите уравнения:

а) $(1-3x) \cdot (x+2) = 0$;

б) $\frac{2x-3}{3} = \frac{4x-1}{5}$.

3. При каком значении переменной разность выражений $8x-3$ и $3x+4$ равна 5?

4. При каком значении параметра a уравнение $a \cdot x = 4a + 2x$ имеет единственный корень? Найдите его.

5. На базе хранится 590 тонн овощей. При этом картофеля в 2,5 раза больше, чем моркови. Лука на 14 тонн больше, чем картофеля. Сколько тонн картофеля, моркови и лука находится на базе?

6. Найдите три последовательных натуральных четных числа, если удвоенная сумма крайних чисел на 84 больше среднего числа.

Вариант III

1. Не решая уравнения $9(2x-1) + 6(3x+1) = 127$, докажите, что оно не имеет целых корней.

2. Решите уравнение:

а) $\frac{2x-3}{3} - \frac{x+2}{4} = \frac{5}{12}$;

б) $|3x-1| = 5$.

3. Оля задумала число и уменьшила его на 3. Этот результат умножила на 4 и прибавила 7. В итоге получилось 31. Найдите задуманное число.

4. При всех значениях параметра a решите уравнение $(a-3) \cdot x = 2a-6$.

5. На трех автобазах находится 606 машин. На второй базе на 18 машин больше, чем на первой. На третьей базе в два раза больше машин, чем на первых двух базах вместе. Какой процент от всех машин находится на третьей базе? Сколько машин на первой базе?

6. При каком наименьшем натуральном значении параметра a уравнение $3(x-1) = a-8$ имеет положительный корень?

Вариант IV

1. Не решая уравнения $6(4x+1) + 9(2x-3) = 128$, докажите, что оно не имеет целых корней.

2. Решите уравнения:

а) $\frac{3x-1}{4} - \frac{4x+1}{3} = \frac{7}{12}$;

б) $|7x-3| = 4$.

3. Юра задумал число и увеличил его на 2. Этот результат умножил на 5 и вычел 6. В итоге получилось 49. Найдите задуманное число.

4. При всех значениях параметра a решите уравнение $(a-2) \cdot x = 3a-6$.

5. На трех складах хранится 624 компьютера. На третьем складе находится на 12 компьютеров меньше, чем на первом. На втором складе в три раза больше компьютеров, чем на первом и третьем складах вместе.

Какой процент от всех компьютеров хранится на втором складе? Сколько компьютеров на первом складе?

6. При каком наибольшем натуральном значении параметра a уравнение $4(x-2)=a-15$ имеет отрицательный корень?

Вариант V

1. Решите уравнение $|x-1|+|x-4|=3$.

2. При всех значениях параметра a решите уравнение $(a-3)(a+2) \cdot x = a+2$.

3. Количество компьютеров на трех складах относится как $1:2:3$. С первого склада было продано семь компьютеров, с третьего склада – 16 компьютеров. После этого на втором складе стало столько же компьютеров, сколько на первом и третьем складе вместе. Сколько компьютеров было на каждом складе сначала?

4. Катер по течению реки за пять часов проплыл такое же расстояние, которое проплывает против течения реки за восемь часов. Во сколько раз собственная скорость катера больше скорости течения реки?

5. Докажите, что уравнение $(x+3)(x+4)(x+5)=31$ не имеет целых корней.

6. При каких целых значениях параметра a уравнение $a \cdot x = 5 + 2x$ имеет целые корни? Найдите эти корни.

Вариант VI

1. Решите уравнение $|x-2|+|x-5|=3$.

2. При всех значениях параметра a решите уравнение $(a-2) \cdot (a+3) \cdot x = a+3$.

3. Количество компьютеров на трех складах относится как $2:1:3$. С первого склада было продано 9 компьютеров, с третьего склада – 27 компьютеров, а на второй склад привезли 32 компьютера. После этого на втором складе стало столько же компьютеров, сколько на первом и третьем складе вместе. Сколько компьютеров было на каждом складе сначала?

4. Катер по течению реки за 6 часов проплыл такое же расстояние, которое проплывает против течения реки за 9 часов. Во сколько раз собственная скорость катера больше скорости течения реки?

5. Докажите, что уравнение $(x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) = 25$ не имеет целых корней.

6. При каких целых значениях параметра a уравнение $a \cdot x = 7 + 3x$ имеет целые корни? Найдите эти корни.

Урок 20. Анализ контрольной работы

Ход урока

I. Итоги работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Удобно данные заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи/Итоги	1	2	3	...	6
+	5				
±	1				
-	1				
Ø	1				

Обозначения:

- + – число решивших задачу правильно или почти правильно;
- ± – число решивших задачу со значительными погрешностями;
- – число не решивших задачу;
- Ø – число не решавших задачу.

Варианты 1, 2 – 8 учащихся.

2. Типичные ошибки при решении задач.

3. Задачи, вызвавшие наибольшие трудности, и их разбор (учителем или школьниками, решившими эту задачу).

II. Разбор задач вариантов

Вариант I

1. а) 2; б) -3.

2. а) $x = \frac{1}{2}$ и $x = -3$; б) $x = -3,5$.

3. $x = 3,5$.

4. При $a \neq 1$: $x = \frac{3a}{a-1}$.

5. 126 тонн наваги, 189 тонн трески, 205 тонн окуня.

6. 28, 29, 30.

Вариант II

1. а) $x = 3$; б) $x = -2$.

2. а) $x = \frac{1}{3}$ и $x = -2$; б) $x = -6$.

3. $x = 2,4$.

4. При $a \neq 2$: $x = \frac{4a}{a-2}$.

5. 96 тонн моркови, 240 тонн картофеля, 254 тонны лука.
6. 26, 28, 30.

Вариант III

1. Доказано.
2. а) $x = 4,6$; б) $x = 2$ и $x = -\frac{4}{3}$.
3. 9.
4. При $a \neq 0$: $x = 2$, при $a = 2$: x – любое число.
5. $66\frac{2}{3}\%$; 92 машины.
6. $a = 6$.

Вариант IV

1. Доказано.
2. а) $x = -2$; б) $x = 1$ и $x = \frac{1}{7}$.
3. 9.
4. При $a \neq 2$: $x = 3$, при $a = 2$: x – любое число.
5. 75 %; 84 компьютера.
6. $a = 6$.

Вариант V

1. Решение

Для решения уравнения $|x-1| + |x-4| = 3$ учтем геометрический смысл модуля. Величина $|x-1|$ – расстояние от числа x до числа 1 на координатной прямой, величина $|x-4|$ – расстояние от числа x до числа 4. Тогда геометрический смысл данного уравнения: сумма расстояний от числа x до чисел 1 и 4 должна равняться 3.



Рис. 1.7

Из рисунка видно, что для чисел $1 \leq x \leq 4$ такое условие выполняется. Таким образом, решение данного уравнения – любое число x из промежутка $1 \leq x \leq 4$.

(Ответ: $1 \leq x \leq 4$.)

2. Если коэффициент при x в уравнении $(a-3) \cdot (a+2) \cdot x = a+2$ не равен нулю (то есть $a \neq 3$ и $a \neq -2$), то уравнение имеет единственный корень $x = \frac{a+2}{(a-3) \cdot (a+2)} = \frac{1}{a-3}$.

Подставим значение $a = 3$ в данное уравнение и получим: $(3-3) \cdot (3+2) \cdot x = 3+2$ или $0 \cdot 3 = 5$. Такое уравнение решений не имеет. Подставим значение $a = -2$ в данное уравнение и получим: $(-2-3) \cdot (-2+2) \cdot x = -2+2$ или $0 \cdot x = 0$. Любое число x является решением данного уравнения.

(Ответ: при $a \neq 3$ и $a \neq -2$: $x = \frac{1}{a-3}$ при $a = 3$ решений нет, при $a = -2$: x – любое число.)

3. Так как число компьютеров на складах относится как $1 : 2 : 3$, то на первом складе находится x штук, на втором – $2x$ штук и на третьем – $3x$ штук. В соответствии с условиями задачи после продажи и поступления компьютеров на склады их стало: на первом складе – $x-1$, на втором складе – $2x+17$ и на третьем складе – $3x-16$. После этого на втором складе стало столько же компьютеров, сколько на первом и третьем складе вместе. Поэтому получаем уравнение: $2x+17 = (x-7) + (3x-16)$ или $2x+17 = 4x-23$, или $40 = 2x$, откуда $x = 20$. Следовательно, на складах было: на первом – 20 штук, на втором – $2 \cdot 20 = 40$ штук, на третьем – $3 \cdot 20 = 60$ штук.

(Ответ: 20; 40; 60.)

4. Решение

Пусть собственная скорость катера x км/ч, скорость течения реки y км/ч. По течению реки, двигаясь со скоростью $x+y$ км/ч, катер за 5 часов проплыл расстояние $5(x+y)$ км. Против течения реки, двигаясь со скоростью $x-y$ км/ч, катер за 8 часов проплыл расстояние $8(x-y)$ км. По условию эти расстояния одинаковы. Поэтому получаем уравнение: $5(x+y) = 8(x-y)$ или $5x+5y = 8x-8y$, или $5y+8y = 8x-5x$, или $13y = 3x$, откуда $x = \frac{13y}{3} = 4\frac{1}{3}y$.

Следовательно, собственная скорость катера больше скорости течения реки в $4\frac{1}{3}$ раза.

(Ответ: $4\frac{1}{3}$.)

5. Пусть уравнение $(x+3) \cdot (x+4) \cdot (x+5) = 31$ имеет целый корень x . Тогда числа $x+3$, $x+4$, $x+5$ – целые и последовательные. Среди трех последовательных целых чисел обязательно одно делится на 2 и одно – на 3 (например, числа 7, 8, 9), поэтому произведение таких чисел без остатка делится на $2 \cdot 3 = 6$. Следовательно, левая часть уравнения кратна 6. В правой части уравнения стоит число 31, которое делится на 6 с

остатком 1. Получаем противоречие. Поэтому данное уравнение не может иметь целых корней.

(Ответ: доказано.)

6. Уравнение $a \cdot x = 5 + 2x$ запишем в виде: $a \cdot x - 2x = 5$ или $(a - 2) \cdot x = 5$. При $a \neq 2$ это уравнение имеет корень $x = \frac{5}{a-2}$. Чтобы такой корень был целым числом, надо чтобы целое число $a - 2$ было делителем числа 5 (то есть $\pm 1, \pm 5$). Поэтому рассмотрим четыре случая:

а) $a - 2 = 1$ (то есть $a = 3$), тогда $x = \frac{5}{1} = 5$;

б) $a - 2 = -1$ (то есть $a = 1$), тогда $x = \frac{5}{-1} = -5$;

в) $a - 2 = 5$ (то есть $a = 7$), тогда $x = \frac{5}{5} = 1$;

г) $a - 2 = -5$ (то есть $a = -3$), тогда $x = \frac{5}{-5} = -1$.

(Ответ: при $a = 3$: $x = 5$, при $a = 1$: $x = -5$, при $a = 7$: $x = 1$, при $a = -3$: $x = -1$.)

Вариант VI

1. Решение

Для решения уравнения $|x - 2| + |x - 5| = 3$ учтем геометрический смысл модуля. Величина $|x - 2|$ — расстояние от числа x до числа 2 на координатной прямой, величина $|x - 5|$ — расстояние от числа x до числа 5. Тогда геометрический смысл данного уравнения: сумма расстояний от числа x до чисел 2 и 5 должна равняться 3.



Рис. 1.8

Из рисунка видно, что для чисел $2 \leq x \leq 5$ такое условие выполняется. Таким образом, решение данного уравнения — любое число x из промежутка $2 \leq x \leq 5$.

(Ответ: $2 \leq x \leq 5$.)

2. Если коэффициент при x в уравнении $(a - 2) \cdot (a + 3) \cdot x = a + 3$ не равен нулю (то есть $(a - 2) \cdot (a + 3) \neq 0$ или $a \neq 2$ и $a \neq -3$), то уравнение имеет единственный корень $x = \frac{a + 3}{(a - 2) \cdot (a + 3)} = \frac{1}{a - 2}$. Подставим значение $a = 2$ в данное уравнение и получим: $(2 - 2) \cdot (2 + 3) \cdot x = 2 + 3$ или

$0 \cdot x = 5$. Такое уравнение решений не имеет. Подставим значение $a = -3$ в данное уравнение и получим: $(-3-2) \cdot (-3+3) \cdot x = -3+3$ или $0 \cdot x = 0$. Любое число x является решением данного уравнения.

(Ответ: при $a \neq 2$ и $a \neq -3$: $x = \frac{1}{a-2}$, при $a = 2$ – решений нет, при $a = -3$: x – любое число.)

3. Решение

Так как число компьютеров на складах относится как $2 : 1 : 3$, то на первом складе находится $2x$, на втором – x штук и на третьем – $3x$ штук. В соответствии с условиями задачи после продажи и поступления компьютеров на склады их стало: на первом складе – $2x - 9$, на втором – $x + 32$ и на третьем складе – $3x - 27$. После этого на втором складе стало столько же компьютеров, сколько на первом и третьем складе вместе. Поэтому получаем уравнение: $x + 32 = (2x - 9) + (3x - 27)$ или $x + 32 = 5x - 36$, или $68 = 4x$, откуда $x = 17$. Следовательно, на складах было: на первом – $2 \cdot 17 = 34$ штуки, на втором – 17 штук, на третьем – $3 \cdot 17 = 51$ штука.

(Ответ: 34; 17; 51.)

4. Решение

Пусть собственная скорость катера x км/ч, скорость течения реки y км/ч. По течению реки, двигаясь со скоростью $x + y$ км/ч, катер за 6 часов проплыл расстояние $6(x + y)$ км. Против течения реки, двигаясь со скоростью $x - y$ км/ч, катер за 9 часов проплыл расстояние $9(x - y)$ км. По условию эти расстояния одинаковы. Поэтому получаем уравнение: $6(x + y) = 9(x - y)$ или $6x + 6y = 9x - 9y$, или $6y + 9y = 9x - 6x$, или $15y = 3x$, откуда $x = \frac{15y}{3} = 5y$.

Следовательно, собственная скорость катера больше скорости течения реки в пять раз.

(Ответ: пять.)

5. Решение

Пусть уравнение $(x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) = 25$ имеет целый корень x , тогда числа $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$ – целые и последовательные. Среди трех последовательных целых чисел обязательно одно делится на 2 и одно – на 3 (например, числа 13, 14, 15), поэтому произведение таких чисел без остатка делится на $2 \cdot 3 = 6$. Следовательно, левая часть уравнения кратна 6. В правой части уравнения стоит число 25, которое делится на 6 с остатком 1. Получаем противоречие. Поэтому данное уравнение не может иметь целых корней.

(Ответ: доказано.)

6. Решение

Уравнение $a \cdot x = 7 + 3x$ запишем в виде: $a \cdot x - 3x = 7$ или $(a - 3) \cdot x = 7$. При $a \neq 3$ это уравнение имеет корень $x = \frac{7}{a-3}$. Чтобы такой корень был целым числом, надо чтобы целое число $a - 3$ было делителем числа 7 (то есть $\pm 1; \pm 7$). Поэтому рассмотрим четыре случая.

а) $a - 3 = 1$ (то есть $a = 4$), тогда $x = \frac{7}{1} = 7$;

б) $a - 3 = -1$ (то есть $a = 2$), тогда $x = \frac{7}{-1} = -7$;

в) $a - 3 = 7$ (то есть $a = 10$) тогда $x = \frac{7}{7} = 1$;

г) $a - 3 = -7$ (то есть $a = -4$), тогда $x = \frac{7}{-7} = -1$.

(Ответ: при $a = 4$: $x = 7$, при $a = 2$: $x = -7$, при $a = 10$: $x = 1$, при $a = -4$: $x = -1$.)

Уроки 21–22. Зачет по теме «Выражения. Преобразование выражений. Уравнения»

Цели: сравнение успеваемости учащихся при одинаковой сложности заданий, возможность повышения оценок за выполненные контрольные работы.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Характеристика зачетной работы

Работа составлена в двух равноценных вариантах. По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий. Соответственно у учащихся возрастает возможность выбора задач. Все задания разбиты на три блока А, В и С. Самые простые задачи находятся в части А, более сложные – в части В, еще сложнее – в части С. Каждая задача из А оценивается в 1 балл, из В – в два балла, из С – в три балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка 3 ставится за 6 баллов, оценка 4 – за 10 баллов, оценка 5 – за 14 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Поэтому разбору заданий работы занятия можно и не посвящать (решения задач могут быть вывешены на стенде).

Вариант I

А

1. Найдите значения выражения $\frac{4a+3ab+7b}{a+2ab+5b}$ при $a=2$, $b=3$.

2. Укажите допустимые значения переменной в выражении:

$$\frac{3a-4}{2(a-3)-(a+1)} + \frac{5a-4}{3(1-a)+4(a-2)}.$$

3. Является ли равенство $3a+4ab+3b=4ba+3(b+a)$ тождеством и почему?

4. Решите уравнение $2(x-3)=7(2-x)$.

5. Решите уравнение $2 \cdot |x-5|=4$.

6. Докажите, что уравнение $3 \cdot |x| + x^2 + 7 = 6$ не имеет решений.

7. Докажите, что уравнение $2x^2+5x+1=0$ не имеет положительных корней.

В

8. Упростите выражение $1,7(2a-3)+0,6(3a-1)-0,4(a-8)$.

9. Решите уравнение $|4-x|=x-4$.

10. Решите уравнение $(3x-2)(2x-4)=0$.

11. Докажите, что уравнение $2(x-3)^2+4 \cdot |x-5|+1=0$ не имеет решений.

С

12. Решите уравнение $3(x-2)^2+4 \cdot |6-3x|=0$.

13. При каких значениях параметра a уравнение $3ax=5a+5$ имеет корни 3, 7 и 15?

14. Докажите, что не существуют целые числа x и y , при которых выполняется равенство $(x+3)(x+4)=8y+5$.

Вариант II

А

1. Найдите значение выражения $\frac{3a+7ab+5b}{2a+3ab+4b}$ при $a=3$, $b=2$.

2. Укажите допустимые значения переменной в выражении:

$$\frac{5a-3}{4(a-2)-3(a-1)} - \frac{7a+5}{a(1-a)+5(a-3)}.$$

3. Является ли равенство $7a+2ab+7b=2ba+7(b+a)$ тождеством

и почему?

4. Решите уравнение $3(x-4)=5(3-x)$.

5. Решите уравнение $3 \cdot |4-x|=6$.

6. Докажите, что уравнение $|x|+2x^2+5=4$ не имеет решений.

7. Докажите, что уравнение $3x^2+7x+2=0$ не имеет положительных корней.

В

8. Упростите выражение $2,7(3a+5)+0,4(2a-3)-0,6(a-3)$.

9. Решите уравнение $|5-x|=x-5$.

10. Решите уравнение $(2x-5)(3x-4)=0$.

11. Докажите, что уравнение $5(x-4)^2+7 \cdot |x-5|+2=0$ не имеет решений.

С

12. Решите уравнение $2(x-3)^2+5 \cdot |9-3x|=0$.

13. При каких значениях параметра a уравнение $7ax=4a-7x+4$ имеет корни 2, 5 и 17?

14. Докажите, что не существуют целые числа x и y , при которых выполняется равенство $(x+5)(x+6)=6y+3$.

III. Разбор заданий

Вариант I

1. Решение

В выражение $\frac{4a+3ab+7b}{a+2ab+5b}$ подставим значения переменных $a=2$ и $b=3$. Получаем: $\frac{4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 3 + 7 \cdot 3}{2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 5 \cdot 3} = \frac{8 + 18 + 21}{2 + 12 + 15} = \frac{47}{29} = 1\frac{18}{29}$.

(Ответ: $1\frac{18}{29}$.)

2. Решение

Данное выражение имеет смысл, если знаменатели дробей не равны нулю, то есть $2(a-3)-(a+1) \neq 0$ и $3(1-a)+4(a-2) \neq 0$. Упростим выражения в левых частях неравенств, раскрыв скобки и приведя подобные члены. Получаем: $2a-6-a-1 \neq 0$ и $3-3a+4a-8 \neq 0$ или $a-7 \neq 0$ и $a-5 \neq 0$. Тогда находим $a \neq 7$ и $a \neq 5$.

(Ответ: $a \neq 7$ и $a \neq 5$.)

3. Решение

Покажем, что левая часть равенства тождественно равна правой. На основании переместительного и сочетательного свойств получаем: $3a + 4ab + 3b = 4ab + 3b + 3a = 4ba + (3b + 3a)$. На основании распределительного свойства имеем $4ba + (3b + 3a) = 4ba + 3(b + a)$. Следовательно, данное равенство является тождеством.

(Ответ: является.)

4. Решение

В обеих частях уравнения $2(x-3)=7(2-x)$ раскроем скобки: $2x-6=14-7x$. В левую часть перенесем слагаемые, зависящие от x , в правую часть — числа. Получаем $2x+7x=14+6$. Приведем подобные члены $9x=20$. Найдем $x=\frac{20}{9}=2\frac{2}{9}$.

(Ответ: $2\frac{2}{9}$)

5. Решение

Обе части уравнения $2 \cdot |x-5|=4$ разделим на число 2 и получим $|x-5|=2$. Так как модуль некоторой величины равен 2, то сама величина равна 2 или -2. Получаем два линейных уравнения: $x-5=2$ (тогда корень $x=7$) и $x-5=-2$ (корень $x=3$).

(Ответ: $x=7$ и $x=3$.)

6. Решение

Уравнение $3 \cdot |x| + x^2 + 7 = 6$ запишем в виде $3 \cdot |x| + x^2 = -1$. Каждое слагаемое в левой части уравнения неотрицательно при любых значениях x (то есть $3 \cdot |x| \geq 0$ и $x^2 \geq 0$). Поэтому сумма слагаемых также неотрицательна. Получаем противоречие: левая часть неотрицательна и равна отрицательному числу -1. Следовательно, при всех значениях x равенство не выполняется. Поэтому данное уравнение не имеет решений.

(Ответ: доказано.)

7. Решение

Пусть уравнение $2x^2 + 5x + 1 = 0$ имеет положительный корень x . Тогда каждое слагаемое в левой части уравнения положительно, так как $3x^2 > 0$ и $5x > 0$. Сумма положительных слагаемых является величиной положительной и не может равняться нулю. Получаем противоречие. Следовательно, данное уравнение не имеет положительных корней.

(Ответ: доказано.)

8. Решение

В данном выражении раскроем скобки и приведем подобные члены. Получаем: $1,7(2a-3)+0,6(3a-1)-0,4(a-8)=$
 $=3,4a-5,1+1,8a-0,6-0,4a+3,2=4,8a-2,5.$

(Ответ: $4,8a-2,5.$)

9. Решение

Для решения уравнения $|4-x|=x-4$ учтем, что при всех значениях x левая часть уравнения неотрицательна. Поэтому правая часть также должна быть неотрицательной $x-4 \geq 0$. Это условие выполняется при $x \geq 4$. При таких значениях x выражение $4-x$, стоящее под модулем, неположительное. Тогда по определению модуля $|4-x|=-(4-x)=x-4$. Поэтому данное уравнение имеет вид $x-4=x-4$ и выполняется при всех значениях x . Однако все рассуждения были справедливы только при $x \geq 4$. Именно такие значения x и будут решениями уравнения.

(Ответ: $x \geq 4.$)

10. Решение

В уравнении $(3x-2)(2x-4)=0$ произведение двух множителей равно нулю. Поэтому один из множителей равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $3x-2=0$ (его корень $x=\frac{2}{3}$) и $2x-4=0$ (корень $x=2$).

(Ответ: $x=\frac{2}{3}$ и $x=2.$)

11. Решение

В уравнении $2(x-3)^2+4 \cdot |x-5|+1=0$ при всех значениях x первые два слагаемые неотрицательны, то есть $2(x-3)^2 \geq 0$ и $4 \cdot |x-5| \geq 0$. Последнее слагаемое – положительное число.

Сумма трех таких слагаемых величина положительная и не может равняться нулю. Поэтому данное уравнение не имеет решений.

(Ответ: доказано.)

12. Решение

В уравнении $3(x-2)^2+4 \cdot |6-3x|=0$ каждое слагаемое при всех значениях x неотрицательно. Поэтому их сумма будет равняться нулю только в том случае, если каждое из них равно нулю, то есть $3(x-2)^2=0$ и $4 \cdot |6-3x|=0$. Первое уравнение разделим на 3, второе – на 4. Получаем уравнения $(x-2)^2=0$ и $|6-3x|=0$. Если квадрат неко-

торой величины равен нулю, то и сама величина равна нулю, то есть $x - 2 = 0$, откуда $x = 2$. Проверим подстановкой, что при таком значении x выполняется и второе уравнение $|6 - 3 \cdot 2| = |6 - 6| = |0| = 0$, откуда $x = 2$.

(Ответ: $x = 2$.)

13. Решение

Линейное уравнение $3ax = 5a - 3x + 5$ запишем в стандартном виде: $3ax + 3x = 5a + 5$ или $3x(a + 1) = 5(a + 1)$. Если коэффициент при x не равен нулю (то есть $a + 1 \neq 0$ или $a \neq -1$), то уравнение имеет единственный корень $x = \frac{5(a+1)}{3(a+1)} = \frac{5}{3}$ и условие задачи не выполняется. При

$a = -1$ данное уравнение имеет вид $x \cdot 0 = 0$. Поэтому любое значение x является корнем уравнения.

Следовательно, в этом случае уравнение будет иметь корни 3, 7 и 15.

(Ответ: $a = -1$.)

14. Решение

Пусть существуют целые числа x и y , которые удовлетворяют уравнению $(x + 3)(x + 4) = 8y + 5$. Тогда числа $(x + 3)$ и $(x + 4)$ – два целых последовательных числа. Одно из этих чисел четное и произведение $(x + 3)(x + 4)$ является четным числом. Число $8y = 2 \cdot (4 \cdot y)$ четное. Тогда сумма четного числа $8y$ и нечетного числа 5 будет числом нечетным. Получаем противоречие: левая часть уравнения – четное число, правая часть – нечетное число. Следовательно, величины x и y не могут быть целыми числами.

(Ответ: доказано.)

Вариант II

1. Решение

В выражение $\frac{3a + 7ab + 5b}{2a + 3ab + 4b}$ подставим значения переменных $a = 3$ и $b = 2$. Получаем: $\frac{3 \cdot 3 + 7 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2}{2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2} = \frac{9 + 42 + 10}{6 + 18 + 8} = \frac{61}{32} = 1 \frac{29}{32}$.

(Ответ: $1 \frac{29}{32}$.)

2. Решение

Данное выражение имеет смысл, если знаменатели дробей не равны нулю, то есть $4(a - 2) - 3(a - 1) \neq 0$ и $4(1 - a) + 5(a - 3) \neq 0$. Упростим выражения в левых частях неравенств, раскрыв скобки и приведя подобные члены. Получаем: $4a - 8 - 3a + 3 \neq 0$ и $4 - 4a + 5a - 15 \neq 0$ или $a - 5 \neq 0$ и $a - 11 \neq 0$. Тогда находим $a \neq 5$ и $a \neq 11$.

(Ответ: $a \neq 5$ и $a \neq 11$.)

3. Решение

Покажем, что левая часть равенства тождественно равна правой. На основании переместительного и сочетательного свойств получаем $7a + 2ab + 7b = 2ab + 7b + 7a = 2ba + (7b + 7a)$. На основании распределительного свойства имеем $2ba + (7b + 7a) = 2ba + 7(b + a)$.

Следовательно, данное равенство является тождеством.

(Ответ: является.)

4. Решение

В обеих частях уравнения $3(x-4) = 5(3-x)$ раскроем скобки: $3x - 12 = 15 - 5x$. В левую часть перенесем слагаемые, зависящие от x , в правую часть — числа. Получаем $3x + 5x = 12 + 15$. Приведем подобные члены $8x = 27$. Найдем $x = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$.

(Ответ: $3\frac{3}{8}$.)

5. Решение

Обе части уравнения $3 \cdot |4-x| = 6$ разделим на число 3 и получим $|4-x| = 2$. Так как модуль некоторой величины равен 2, то сама величина равна 2 или -2 . Получаем два линейных уравнения: $4-x = 2$ (тогда корень $x = 2$) и $4-x = -2$ (корень $x = 6$).

(Ответ: $x = 2$ и $x = 6$.)

6. Решение

Уравнение $|x| + 2x^2 + 5 = 4$ запишем в виде $|x| + 2x^2 = -1$. Каждое слагаемое в левой части уравнения неотрицательное при любых значениях x (то есть $|x| \geq 0$ и $2x^2 \geq 0$). Поэтому сумма слагаемых также неотрицательная. Получаем противоречие: левая часть неотрицательная и равна отрицательному числу -1 . Следовательно, при всех значениях x равенство не выполняется. Поэтому данное уравнение не имеет решений.

(Ответ: доказано.)

7. Решение

Пусть уравнение $3x^2 + 7x + 2 = 0$ имеет положительный корень x . Тогда каждое слагаемое в левой части уравнения положительное, так как $3x^2 > 0$ и $7x > 0$. Сумма положительных слагаемых является величиной положительной и не может равняться нулю. Получаем противоречие. Следовательно, данное уравнение не имеет положительных корней.

(Ответ: доказано.)

8. Решение

В данном выражении раскроем скобки и приведем подобные члены. Получаем: $2,7(3a+5)+0,4(2a-3)-0,6(a-3)=$
 $=8,1a+13,5+0,8a-12-0,6a+1,8=8,3a+14,1.$

(Ответ: $8,3a+14,1$.)

9. Решение

Для решения уравнения $|5-x|=x-5$ учтем, что при всех значениях x левая часть уравнения неотрицательная. Поэтому правая часть также должна быть неотрицательной $x-5 \geq 0$. Это условие выполняется при $x \geq 5$. При таких значениях x выражение $5-x$, стоящее под модулем, неположительное. Тогда по определению модуля $|5-x|=-(5-x)=x-5$. Поэтому данное уравнение имеет вид $x-5=x-5$ и выполняется при всех значениях x . Однако все рассуждения были справедливы только при $x \geq 5$. Именно такие значения x и будут решениями уравнения.

(Ответ: $x \geq 5$.)

10. Решение

В уравнении $(2x-5)(3x-4)=0$ произведение двух множителей равно нулю. Поэтому один из множителей равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $2x-5=0$ (его корень $x=\frac{5}{2}=2,5$) и $3x-4=0$ (корень $x=\frac{4}{3}$).

(Ответ: $x=2,5$ и $x=\frac{4}{3}$.)

11. Решение

В уравнении $5(x-4)^2+7|x-5|+2=0$ при всех значениях x первые два слагаемых неотрицательные, то есть $5(x-4)^2 \geq 0$ и $7x-5 \geq 0$. Последнее слагаемое - положительное число.

Сумма трех таких слагаемых величина положительная и не может равняться нулю. Поэтому данное уравнение не имеет решений.

(Ответ: доказано.)

12. Решение

В уравнении $2(x-3)^2+5|9-3x|=0$ каждое слагаемое при всех значениях x неотрицательное. Поэтому их сумма будет равняться нулю только в том случае, если каждое из них равно нулю, то есть $2(x-3)^2=0$ и $5|9-3x|=0$. Первое уравнение разделим на 2, второе -

на 5. Получаем уравнения $(x-3)^2 = 0$ и $|9-3x| = 0$. Если квадрат некоторой величины равен нулю, то и сама величина равна нулю, то есть $x-3=0$, откуда $x=3$. Проверим подстановкой, что при таком значении x выполняется и второе уравнение $|9-3 \cdot 3| = |9-9| = |0| = 0$. Итак, данное уравнение имеет единственный корень $x=3$.

(Ответ: $x=3$.)

13. Решение

Линейное уравнение $7ax = 4a - 7x + 4$ запишем в стандартном виде: $7ax + 7x = 4a + 4$ или $7x(a+1) = 4(a+1)$. Если коэффициент при x не равен нулю (то есть $a+1 \neq 0$ или $a \neq -1$), то уравнение имеет единственный корень $x = \frac{4(a+1)}{7(a+1)} = \frac{4}{7}$ и условие задачи не выполняется. При

$a = -1$ данное уравнение имеет вид $x \cdot 0 = 0$. Поэтому любое значение x является корнем уравнения. Следовательно, в этом случае уравнение будет иметь корни 2,5 и 17.

(Ответ: $a = -1$.)

14. Решение

Пусть существуют целые числа x и y , которые удовлетворяют уравнению $(x+5)(x+6) = 6y + 3$. Тогда числа $x+5$ и $x+6$ – два целых последовательных числа. Одно из этих чисел четное и произведение $(x+5)(x+6)$ является четным числом. Число $6y = 2(3y)$ четное. Тогда сумма четного числа $6y$ и нечетного числа 3 будет числом нечетным. Получаем противоречие: левая часть уравнения – четное число, правая часть – нечетное число. Следовательно, величины x и y не могут быть целыми числами.

(Ответ: доказано.)

Глава II. Функции

§ 4. Функции и их графики

Урок 23. Понятие функции

Цель: дать представление о функции и основных понятиях, связанных с ней.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

Очень часто рассматривается зависимость между различными величинами. Например, пройденный телом путь зависит от времени движения при постоянной скорости. Масса тела зависит от его объема и плотности материала. Сила притяжения между планетами зависит от их масс и расстояния между ними. Далее будут изучаться зависимости только между двумя величинами. Такие зависимости можно установить различными способами: с помощью формулы (или формул), с помощью графика, с помощью таблицы.

Пример 1

Машина движется по шоссе с постоянной скоростью 70 км/ч. За время t ч машина проходит путь $S = 70 \cdot t$ км. Легко вычислить пройденный путь за любое время:

Если $t = 1$, то $S = 70 \cdot 1 = 70$;

Если $t = 1,5$, то $S = 70 \cdot 1,5 = 105$;

Если $t = 3$, то $S = 70 \cdot 3 = 210$.

Зависимость переменной S от переменной t выражается формулой $S = 70 \cdot t$ (по смыслу задачи $t > 0$). При изменении величины t меняется также и величина S . Другими словами: в зависимости от времени t движения машины меняется и пройденный путь S . Такую зависимость $S = 70 \cdot t$ называют **функцией**. При этом роль переменных S и t различна. Время движения t определяется только желанием водителя и называется **независимой переменной** или **аргументом**. Пройденный путь S определяется временем движения t (при скорости 70 км/ч) и называется **зависимой переменной**. При этом для каждого значения t можно найти только единственное значение S .

Пример 2

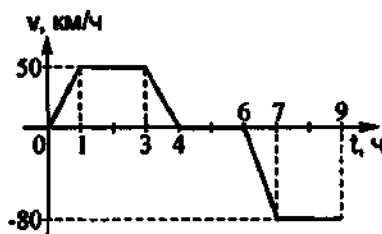


Рис 1.9

На рисунке изображен график скорости машины v в зависимости от времени t за время поездки. Видно, что в течении первого часа машина разгоняется до скорости 50 км/ч. В промежутке от 1 ч до 3 ч машина движется с этой постоянной скоростью. За время от 3 ч до 4 ч машина тормозит и ее скорость уменьшается до нуля. В промежутке от 4 ч до 6 ч машина стоит (ее скорость равна нулю). За промежуток от 6 ч до 7 ч машина разгоняется до скорости 80 км/ч, но движется в противоположном направлении (скорость имеет отрицательный знак). В промежутке от 7 ч до 9 ч машина движется с этой скоростью.

Из графика можно найти скорость v машины в любой момент времени t (при $0 \leq t \leq 9$). Например, как видно из графика:

Если $t = 0,5$, то $v = 25$;

Если $t = 1,5$, то $v = 50$;

Если $t = 5$, то $v = 0$;

Если $t = 6,5$, то $v = -40$;

Если $t = 8$, то $v = -80$.

При этом величину t мы можем выбирать произвольно (t — независимая переменная). От выбранного значения t зависит величина скорости v . Поэтому v — зависимая переменная. При этом для каждого значения t можно найти единственное значение v .

Пример 3

Выпишем таблицу квадратов y натуральных чисел x .

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Такая таблица также задает функцию: для каждого значения x можно найти единственное значение y . Например, как видно из таблицы:

Если $x = 2$, то $y = 4$;

Если $x = 5$, то $y = 25$;

Если $x = 9$, то $y = 81$.

Сформулируем на основании рассмотренных примеров более общее определение функции. Зависимость переменной y от переменной x на-

зывается функцией (или функциональной зависимостью), если каждому значению x соответствует единственное значение y . Переменную x называют независимой переменной (или аргументом), а переменную y – зависимой переменной. Чтобы подчеркнуть, что y зависит от x часто пишут $y(x)$ (читается: « y от x »). Все значения, которые может принимать независимая переменная x , образуют область определения функции. Все значения, которые при этом принимает зависимая переменная y (значения функции), образуют область значений (или область изменения) функции.

В примере 1 область определения функции $S(t)$ все $t \geq 0$, область значений – все $S \geq 0$.

В примере 2 область определения функции $V(t)$ все t из промежутка $0 \leq t \leq 9$ и область значений – все v из промежутка $-80 \leq v \leq 50$.

В примере 3 область определения функции $y(x)$ – значения x , равные 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; область значений – значения y , равные 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

III. Задание на уроке

Выполнить упражнения: № 252, 253, 257.

IV. Контрольные вопросы

- Приведите примеры функциональных зависимостей, укажите независимую и зависимую переменные.
- Дайте определение функции.
- Что называется областью определения и областью значений функции?
- На каком рисунке изображен график функции?

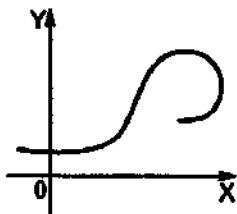


Рис. 1.10а

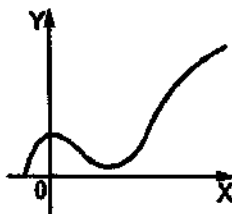


Рис. 1.10б

(Ответ: на правом рисунке изображен график функции, так как каждому значению x соответствует одно значение y ; на левом рисунке существуют такие значения x , которым соответствуют два значения y .)

V. Задание на дом

Выполнить упражнения: № 254, 256, 258, 259, 260.

VI. Подведение итогов урока

Урок 24. Вычисление значений функций по формуле

Цель: знакомство с аналитическим способом задания функции.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

- 1) Дайте определение функции.
- 2) Приведите примеры функций, укажите независимую и зависимую переменные.

Вариант 2

- 1) Что называется областью определения и областью значений функции?
- 2) Приведите примеры функций, укажите независимую и зависимую переменные.

III. Изучение нового материала

Способ задания функции с помощью формулы (формул) называется **аналитическим**. Этот способ позволяет для любого значения аргумента найти соответствующее значение функции путем вычислений. Чтобы вычислить значение функции $y(x)$ при $x = a$, надо в формулу, задающую функцию, подставить данное значение аргумента a и выполнить вычисления. Такое значение функции обозначают символом $y(a)$.

Пример 1

Рассмотрим функцию $y(x) = x^2 + x$. Эта формула означает, что для вычисления величины y необходимо возвести в третью степень значение x и полученную величину сложить с самой величиной x . Поэтому, например, $y(-2) = (-2)^3 + (-2) = -8 - 2 = -10$; $y(5) = 5^2 + 5 = 125 + 5 = 130$, $y(a) = a^3 + a$; $y(3a) = (3a)^3 + (3a) = 3^3 \cdot a^3 + 3a = 27a^3 + 3a$ и так далее. Функция может быть задана и с помощью нескольких формул.

Пример 2

Рассмотрим функцию $y(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ положительно;} \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ -1, & \text{если } x \text{ отрицательно.} \end{cases}$

Несмотря на некоторую непривычность, это выражение также задает функцию и для любого значения x легко найти величину y . Например, $y\left(\frac{3}{7}\right)=1$ (так как значение x = положительно, то пользуемся первой строчкой), $y(0)=0$ (так как значение $x=0$, то используем вторую строчку), $y(2,3)=-1$ (так как значение $x=-2,3$ отрицательно, то пользуемся третьей строчкой).

Пример 3

Рассмотрим функцию $y(x)=|x|$. Если учесть определение модуля числа (выражения), то эту функцию можно записать в виде:

$$y(x)=\begin{cases} x, & \text{если } x \text{ неотрицательно;} \\ -x, & \text{если } x \text{ отрицательно.} \end{cases}$$

Для любого значения x можно найти y . Например, $y(3,7)=3,7$ (так как $x=3,7$ – число положительное, то пользуемся первой строчкой определения функции); $y(0)=0$ (так как $x=0$ – число неотрицательное, то вновь используем первую строчку); $y(-2,3)=-(2,3)=2,3$ (так как $x=-2,3$ – число отрицательное, то пользуемся второй строчкой).

Достаточно часто приходится решать обратную задачу: находить значения аргумента по известным значениям функции.

Пример 4

Функция задана формулой $y=5x-7$. Найдем, при каком значении аргумента x значение функции y равно 13.

Так как $y=13$, то подставим это значение в формулу $y=5x-7$. Получаем линейное уравнение $13=5x-7$. Решая его, находим $x=4$. Итак, при $x=4$ значение $y=13$.

Заметим, что для нахождения значения функции при $x=a$, надо подставить эту величину a вместо x в формулу функции и выполнить вычисления. Такие действия всегда легко сделать. Для нахождения значения аргумента x по известному значению функции $y=b$, надо подставить эту величину b вместо y в формулу функции. Получается уравнение с неизвестной x , корни которого и являются требуемыми значениями аргумента. При этом иногда такое уравнение очень сложно решить (пока учащиеся умеют решать только линейные уравнения).

При задании функции ее область определения иногда указывается. Если она не указана, то область определения состоит из всех значений аргумента, при которых формула для функции имеет смысл.

Пример 5

а) Функция задана формулой $y = \frac{5}{(x-1)(x+3)}$, где $2 \leq x \leq 9$. В этом примере область определения указана – все значения x из промежутка $2 \leq x \leq 9$.

б) Функция задана формулой $y = \frac{5}{(x-1)(x+3)}$. В этом случае область определения не указана.

Найдем значения аргумента x , при которых формула для функции имеет смысл. Так как эта формула представляет собой дробь, то ее знаменатель не может равняться нулю, то есть $(x-1)(x+3)$, откуда $x \neq 1$ и $x \neq -3$. Итак, область определения данной функции – все значения x , кроме чисел -3 и 1 .

IV. Задание на уроке

Выполнить упражнения: № 261; 263; 265; 266 (в, г); 267; 271.

V. Контрольные вопросы

- Какой способ задания функции называется аналитическим?
- Приведите примеры функций, заданных: а) одной формулой, б) двумя формулами; в) тремя формулами.
- Как найти значение функции по известному аргументу? Поясните на примере.
- Как найти значения аргумента, которому соответствует данное значение функции? Поясните на примере.
- Как найти область определения функции? Поясните на примере.

VI. Задание на дом

Выполнить упражнения: № 262; 264; 266 (а, б); 268; 269; 272.

VII. Творческие задания

1. Какие формулы задают функцию:

а) $3x + 4 + 5 = 2y + x$; б) $y^2 + 5x = 6$;

в) $y = \begin{cases} 1, & \text{если } x < 1, \\ 2, & \text{если } -1 \leq x \leq 2, \\ 3, & \text{если } x > 2. \end{cases}$ г) $y = \begin{cases} x, \\ x^2. \end{cases}$

Ответы: а), в) – задают функцию; б), г) – нет, так как одному значению аргумента x могут соответствовать два значения y : б) при $x = 1$: $y = \pm 1$, в) при $x = 2$: $y_1 = 2$ и $y_2 = 4$.

2. Найдите область определения функций:

а) $y = \frac{x-1}{x-1};$

б) $y = \frac{3x+5}{x-1} + \frac{2x}{x+3};$

в) $y = \frac{2x-4}{(x-1)(x+3)};$

г) $y = \begin{cases} 3x, & \text{если } -5 \leq x \leq 1, \\ 4-x, & \text{если } 1 < x \leq 9; \end{cases}$

д) $y = \begin{cases} 3x, & \text{если } -5 \leq x \leq 1, \\ 3-x, & \text{если } 1 < x \leq 9; \end{cases}$

е) $y = \begin{cases} x, & \text{если } -2 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{x}, & \text{если } 1 < x \leq 2. \end{cases}$

ж) $y = \begin{cases} x, & \text{если } -2 \leq x \leq -1, \\ \frac{1}{x}, & \text{если } -1 < x \leq 2. \end{cases}$

Ответы:

а) $x \neq 1;$

б) $x \neq -3$ и $x \neq 1;$

в) $x \neq -3$ и $x \neq 1;$

г) $-5 \leq x \leq 9;$

д) $-5 \leq x \leq 9$ и $x \neq 1;$

е) $-2 \leq x \leq 2;$

ж) $-2 \leq x \leq 2$ и $x \neq 0.$

3. Объясните, почему перечисленные формулы не задают функцию?

а) $y = \begin{cases} 2, & \text{если } x \leq 5, \\ 6, & \text{если } x \geq 5; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} x, & \text{если } -7 \leq x \leq -2, \\ 2x, & \text{если } -2 \leq x \leq 1, \\ 3x, & \text{если } 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$

Как надо записать эти формулы, чтобы они определили функцию?

Ответы:

а) при $x = 5$ существуют два значения y : 2 и 6. Поэтому одно значение надо устранить. Формулу можно записать в виде: $y = \begin{cases} 2, & \text{если } x \leq 5, \\ 6, & \text{если } x > 5 \end{cases}$

или $y = \begin{cases} 2, & \text{если } x < 5, \\ 6, & \text{если } x \geq 5. \end{cases}$

б) при $x = -2$ существуют два значения y : -2 и -4 и при $x = 1$ также существуют два значения y : 2 и 3. По одному значению надо устранить.

Формулу можно записать в виде: $y = \begin{cases} x, & \text{если } -7 \leq x < -2, \\ 2x, & \text{если } -2 \leq x \leq 1, \\ 3x, & \text{если } 1 < x \leq 3. \end{cases}$

Возможны и другие варианты.

VIII. Подведение итогов урока

Уроки 25–26. График функции

Цель: дать понятие о графическом и табличных способах задания функции, построении графика функции.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1) Приведите примеры функций, заданных:

- а) одной формулой;
- б) двумя формулами.

2) Функция задана формулой $y = -3x + 2$. Заполните пустые клетки таблицы:

x	-2		0,5		0	
y		-4		1		0

3) Найдите область определения функции $y = \frac{7x+3}{(2x-1)(x+2)}$.

Вариант 2

1) Приведите примеры функций, заданных:

- а) одной формулой;
- б) двумя формулами.

2) функция задана формулой $y = -2x + 3$. Заполните пустые клетки таблицы:

x	-3		0,5		0	
y		-1		4		0

3) Найдите область определения функции $y = \frac{5x-2}{(3x-2)(x+3)}$.

III. Изучение нового материала

Перед тем как перейти к графическому и табличному способам задания функции остановимся на прямоугольной системе координат и напомним основные сведения. Две взаимно перпендикулярные числовые оси образуют систему координат. Прямые углы, образуемые осями координат, называют координатными углами (квадрантами) и нумеруют так, как показано на рисунке. Горизонтальная ось системы координат (ось Ox) называется осью абсцисс, вертикальная ось (ось Oy) — осью ординат.

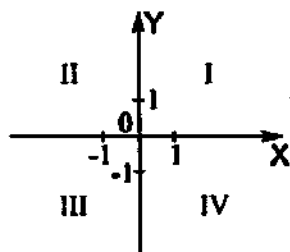


Рис. 1.11

Так же как и на числовой оси может быть изображено любое число, так и любая пара чисел $(x; y)$ (причем первое число обязательно x , второе — y) может быть изображена в прямоугольной системе координат.

Пример 1

Построим точку $A(2; 3)$, то есть точку A с координатами $x = 2, y = 3$.

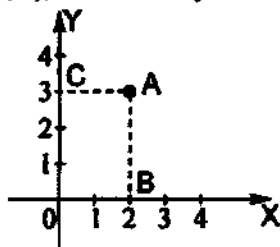


Рис. 1.12

Отложим на оси абсцисс (ось Ox) число 2 (точка B) и восстановим из точки B перпендикуляр к оси Ox . Отложим на оси ординат (оси Oy) число 3 (точка C) и восстановим из точки C перпендикуляр к оси Oy . Точка A пересечения этих двух перпендикуляров и будет искомой точкой.

Также справедливо и обратное утверждение: любая точка, изображенная в системе координат, характеризуется парой чисел (координатами).

Пример 2

Найти координаты точки A , изображенной на рисунке.

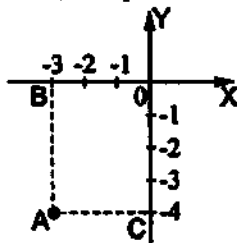


Рис. 1.13

Из точки А опустим перпендикуляр на ось абсцисс и получим точку В, которой соответствует $x = -3$.

Проведем из точки А перпендикуляр к оси ординат и получим точку С, которой соответствует число $y = -4$. Найденные значения x и y являются координатами точки А, то есть точка А характеризуется парой чисел $(-3; -4)$, то есть $A(-3; -4)$.

В прямоугольной системе координат для изображения функциональной зависимости $y(x)$ удобно пользоваться специальным рисунком – графиком функции.

Пример 3

Рассмотрим функцию $y = x^2 - 2x$, где $-1 \leq x \leq 3$. Составим таблицу значений этой функции с шагом 0,5.

x	-1		0,5		0	
y		-1		4		0

Построим эти пары чисел (x, y) в системе координат (рисунок слева).

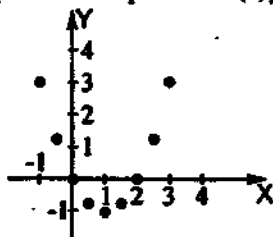


Рис 1.14а

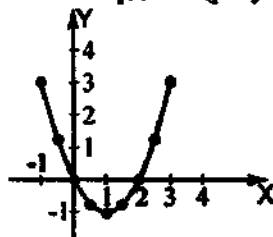


Рис 1.14б

Если при составлении таблицы шаг выбрать еще меньше, то получим еще больше пар значений (x, y) . Каждой из этих пар также соответствует некоторая точка координатной плоскости. Все такие точки образуют график функции $y = x^2 - 2x$ на промежутке $-1 \leq x \leq 3$ (рисунок справа). Из рисунка видно, что область определения данной функции – промежуток $-1 \leq x \leq 3$, область значений – промежуток $-1 \leq y \leq 3$.

Графиком функции $y(x)$ называют множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям независимой переменной x , а ординаты – соответствующим значениям зависимой переменной y .

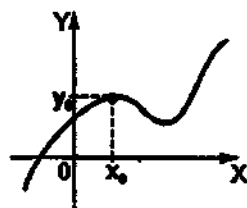


Рис 1.15

В силу такого определения все точки $(x_0; y_0)$, которые удовлетворяют функциональной зависимости $y(x)$, расположены на графике функции. Любые другие точки (то есть координаты которых не удовлетворяют зависимости $y(x)$) не лежат на графике функции.

Пример 4

Дана функция $y = x^2 + 2x - 1$. Принадлежит ли графику этой функции точка с координатами: а) $(-1; -4)$; б) $(1; 3)$?

а) Найдем значение y при $x = -1$ для данной функции:

$$y(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 1 = 1 - 2 - 1 = -4.$$

Так как $y(-1) = -4$, то точка $(-1; -4)$ с такой же ординатой принадлежит графику функции.

б) Найдем значение y при $x = 1$ для данной функции:

$$y(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 = 1 + 2 - 1 = 2.$$

Так как $y(1) = 2$, то точка $(1; 3)$ с другой ординатой не принадлежит графику функции.

График дает наглядное представление о поведении функции: возрастании и убывании; нулях функции; областях определения и значений и так далее. Также с помощью графика функции по значению аргумента легко найти соответствующее значение функции. Легко решается и обратная задача: по данному значению функции найти те значения аргумента, которым оно соответствует.

Пример 5

По графику функции, изображенному на рисунке, найти:

а) значение функции при $x = 1$;

б) значение аргумента, при котором значение функции $y = 5$.

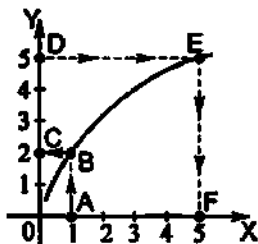


Рис. 1.16

а) По оси абсцисс отложим точку А, для которой $x = 1$. Из точки А восстановим перпендикуляр к оси абсцисс до пересечения с графиком функции в точке В. Из точки В проведем перпендикуляр к оси ординат до пересечения с ней в точке С. Ордината точки С равна $y = 2$. Следовательно, при $x = 1$ значение данной функции $y = 2$.

б) По оси ординат отложим точку D, для которой $y = 5$. Из точки D

проведем перпендикуляр к оси ординат до пересечения с графиком функции в точке E . Из точки E опустим перпендикуляр к оси абсцисс до пересечения с ней в точке F . Абсцисса точки F равна $x = 5$. Значит, данная функция принимает значение $y = 5$ при значении аргумента $x = 5$.

IV. Задание на уроке

Выполнить упражнения: № 277, 279, 280, 282, 285, 288, 291.

V. Контрольные вопросы

– На примере объясните, как построить точку на координатной плоскости.

Объясните, как найти координаты точки, построенной на координатной плоскости.

– Что называется графиком функции?

– Как определить, принадлежит ли точка $A(a; b)$ графику функции $y(x)$ или нет?

– На примере поясните, как найти значение функции по данному значению аргумента, используя график функции. Как решить обратную задачу: найти аргумент по известному значению функции?

VI. Задание на дом

Выполнить упражнения: № 278, 281, 283, 286, 287, 289, 290, 292.

VII. Творческие задания

1. На каком рисунке изображен график функции?

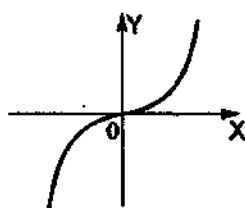


Рис. 1.17а

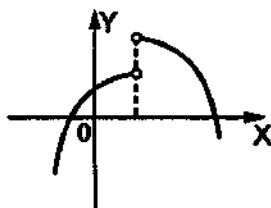


Рис. 1.17б

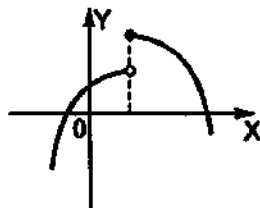


Рис. 1.17в

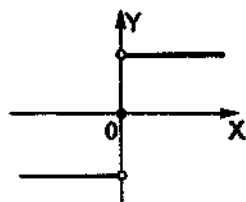


Рис. 1.17г

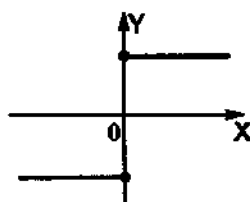


Рис. 1.17д

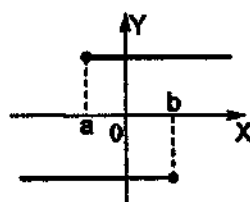


Рис. 1.17е

Замечание: пустой кружок соответствует отсутствию точки, заполненный кружок — наличию.

(Ответы: на рисунках «а», «б», «в», «г») изображены графики функ-

ций, на рисунках «д», «е» – нет. Так как: для «д» при $x = 0$ есть два значения y ; для «е» на промежутке $a \leq x \leq b$ есть два значения y .)

2. По графику функции найти ее области определения и значений.

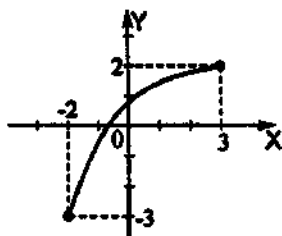


Рис. 1.18а

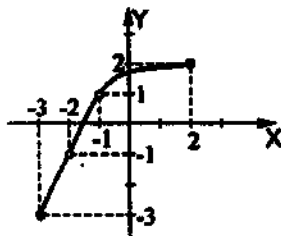


Рис. 1.18б

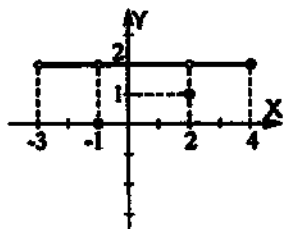


Рис. 1.18в

(Ответы:

а) область определения $-2 \leq x \leq 3$, область значений $-3 \leq y \leq 2$;

б) область определения: $-3 \leq x < -2$, $-2 < x < -1$; области значений: $-3 \leq y < -1$, $-1 < y < 1$, $1 < y \leq 2$.

в) область определения: $-3 \leq x \leq 4$; область значений: числам $y = 0$, 1, 2.)

VIII. Подведение итогов урока

§ 5. Линейная функция

Урок 27. Линейная функция и ее график

Цель: рассмотреть линейную функцию и ее график, основные способы построения графика такой функции.

Ход урока

1. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

- 1) Что называется графиком функции?
- 2) Ломаная ABC – график некоторой функции, причем A $(-5; -3)$, B $(-1; 1)$ и C $(3; -5)$. Начертите график и найдите по графику:
 - а) область определения и область значений функции;
 - б) значения функции при $x = -2; 0; 1$;
 - в) значения аргумента, которым соответствует $y = -2; 0$.
- 3) Функция задана формулой $y = -\frac{5}{x}$, где $1 \leq x \leq 5$. Составьте таблицу значений функции для целых значений x . Постройте график функции. По нему определите:
 - а) область значений функции;
 - б) $y(2)$.

Вариант 2

- 1) Как определить, принадлежит ли точка A $(a; b)$ графику функции $y(x)$ или нет?
- 2) Ломаная ABC – график некоторой функции, причем A $(-6; 4)$, B $(-1; -1)$ и C $(4; 6)$. Начертите график и найдите по графику:
 - а) область определения и область значений функции;
 - б) значения функции при $x = -4; 0; 2$;
 - в) значения аргумента, который соответствует $y = 0; 2$.
- 3) Функция задана формулой $y = \frac{6}{x}$, где $-6 \leq x \leq -1$. Составьте таблицу значений функции для целых значений x . Постройте график функции. По нему определите:
 - а) область значений функции;
 - б) $y(2)$.

III. Изучение нового материала

Функция $y = kx + b$ (где k и b – некоторые числа) называется линейной функцией. Обратите внимание, что в формулу $y = kx + b$ независимая переменная x входит в степени не выше первой.

Пример 1

а) Функции $y = 5x - 3$, $y = -2x + 5$, $y = 7x$, $y = -x$ являются линейными, так как в эти функции переменная x входит в первой степени. Причем, для первой функции $k = 5$, $b = -3$, для второй – $k = -2$, $b = 5$, для третьей – $k = 7$, $b = 0$, для четвертой – $k = -1$, $b = 0$.

б) Функции $y = -3$, $y = 0$, $y = 5$ также являются линейными. Для всех функций $k = 0$. При этом: для первой функции $b = -3$, для второй $-b = 0$, для третьей $-b = 5$.

в) Функции $y = 2x^2 - 3$, $y = \frac{3}{5x-3}$, $y = \frac{2x+5}{x}$ не являются линейными, так как в первую функцию переменная x входит во второй степени (x^2); вторая и третья функции вообще не описываются формулой $y = kx + b$ (хотя в эти функции аргумент x входит только в первой степени) и являются дробно-линейными функциями.

г) Функция $y = |x|$ не является линейной, так как зависит не от x , а от $|x|$. Однако, если рассматривать только неотрицательные значения x , то это линейная функция $y = x$ ($k = 1, b = 0$), если только отрицательные значения x , то это также линейная функция $y = -x$ ($k = -1, b = 0$). Значительное число задач приводит к возникновению линейных функций.

Пример 2

Первоначальное расстояние между машинами 30 км. Машины движутся по прямолинейному шоссе в противоположные стороны со скоростями 40 км/ч и 50 км/ч. Найдём расстояние между машинами через t часов.

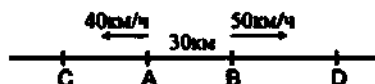


Рис. 1.19

Пусть сначала машины находились в точках А и В, расстояние между которыми $AB = 30$ км. Через t часов одна машина окажется в точке С, пройдя расстояние $AC = 40 \cdot t$ км. Другая машина попадет в точку D проехав расстояние $BD = 50 \cdot t$ км. Через t часов расстояние между машинами $S = CD = AC + AB + BD = 40 \cdot t + 30 + 50 \cdot t = 90 \cdot t + 30$ км. Зависимость расстояния между машинами от времени имеет вид $S = 90 \cdot t + 30$ (где $t \geq 0$), то есть является линейной функцией ($k = 90$, $b = 30$).

Пример 3

Вес ребенка в возрасте до пяти лет каждый год увеличивается на три килограмма. При рождении малыш весит четыре килограмма. Найдём вес ребенка y кг в возрасте x лет. За x лет вес ребенка возрастет на $3x$ кг. Учтем первоначальный вес малыша, тогда через x лет он будет весить $y = 4 + 3x$ кг. Зависимость веса ребенка y от его возраста x имеет вид $y = 3x + 4$ (где $0 \leq x \leq 5$), то есть является линейной функцией ($k = 3$, $b = 4$).

Графиком линейной функции является прямая линия. Поэтому

для построения графика достаточно найти любые две точки, принадлежащие графику, и провести через них прямую.

Пример 4

Построим график функции $y = -3x + 6$.

При $x = 1$ найдем $y(1) = -3 + 6 = 3$. Поэтому точка $A(1; 3)$ принадлежит графику функции. Для $x = 2$ найдем $y(-3 \cdot 2 + 6 = 0)$. Точка $B(2; 0)$ также принадлежит графику функции. На координатной плоскости построим эти точки A и B . С помощью линейки через точки A и B проведем прямую линию — график данной линейной функции.

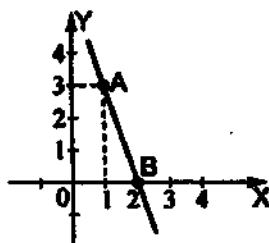


Рис. 1.20

В качестве точек, через которые проходит график функции, достаточно часто удобно брать точки пересечения графика с осями координат.

Пример 5

Построим график функции $y = 2x - 4$, найдя точки пересечения его с осями координат.

Найдем точку пересечения графика функции с осью ординат. Как известно, для любой точки, расположенной на оси ординат, абсцисса равна нулю. Поэтому в зависимости $y = 2x - 4$ положим $x = 0$ и найдем $y = 2 \cdot 0 - 4$. Такая точка пересечения $A(0; -4)$, построим ее.

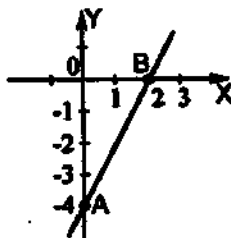


Рис. 1.21

Теперь найдем точку пересечения графика с осью абсцисс. Любая точка на этой оси имеет ординату, равную нулю. Поэтому в зависимости

$y = 2x - 4$ положим $y = 0$. Получаем линейное уравнение $0 = 2x - 4$, откуда $x = 2$. Имеем точку пересечения В (2; 0) и строим ее. Через точки А и В проводим прямую — график данной функции.

Из рассмотренного примера понятен смысл величины b в зависимости $y = kx + b$. Это ордината точки, в которой график функции пересекает ось Oy . Действительно, если положим $x = 0$, то получим $y = k \cdot 0 + b = b$ при всех значениях k . Это означает, что точка (0; b) принадлежит графику функции $y = kx + b$ и является точкой пересечения графика с осью ординат.

Далее будет показано, что величина k определяет наклон графика функции $y = kx + b$. При $k = 0$ такая прямая параллельна оси абсцисс (или совпадает с ней).

Пример 6

Построим график функции $y = -3$. При любом значении аргумента x значение функции равно одной и той же величине $y = -3$.

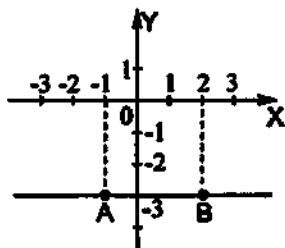


Рис. 1.22

Поэтому, например, точки А (-1; -3) и В (2; -3) принадлежат графику функции. Построим эти точки на координатной плоскости и проведем через них прямую. Получаем прямую, параллельную оси абсцисс.

IV. Задание на уроке

№ 296; 299 (а, г); 301; 302 (а, д); 304; 308 (б, в); 310 (а, в).

V. Контрольные вопросы

- Какая функция является линейной? Приведите примеры.
- Что является графиком линейной функции? Как можно построить такой график?
- Как найти точки пересечения графика линейной функции с осями координат? Поясните на примере.
- Смысл величин k и b в формуле линейной функции?
- Какая прямая будет графиком линейной функции при $k = 0$?

VI. Задание на дом

№ 297; 298; 299 (б, в, д); 300; 302 (б, в); 305; 308 (а, г); 310 (б, г).

VII. Творческие задания

1. График функции $y = kx + b$ проходит через точку А. Найдите величину k , если:

- а) А (2; 3); б) А (-1; -2);
в) А (3; 4); г) А (0; 3).

2. График функции $y = -2x + b$ проходит через точку А. Найдите величину b , если:

- а) А (2; 1); б) А (1; -2); в) А (2; 4).

3. График функции $y = kx + b$ проходит через точки А и В. Найдите величины k и b , если:

- а) А (0; 3) и В (2; 5);
б) А (0; 4) и В (3; 4);
в) А (0; 5) и В (2; -3).

4. Из приведенной зависимости выразите каждую переменную через все остальные:

- а) $U = R \cdot I$; б) $v = v_0 + a \cdot t$;
в) $F = m \cdot a$; г) $v = \frac{S - S_0}{t}$.

VIII. Подведение итогов урока**Уроки 28–29. Построение графиков
более сложных функций**

Цель: получить навыки построения сложных графиков.

Ход урока**I. Сообщение темы и цели урока****II. Повторение и закрепление пройденного материала**

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

- 1) Из зависимости $y = -3x + 4$ выразите переменную x через y .
- 2) Постройте график функции $y = -3x + 4$ двумя способами (выбирая две произвольные точки и точки пересечения с осями координат).
- 3) График функции $y = kx + b$ проходит через точки А (0; -4) и В (3; 5). Найдите величины k и b .

Вариант 2

- 1) Из зависимости $y = -4x + 3$ выразите переменную x через y .
- 2) Постройте график функции $y = -4x + 3$ двумя способами (выбирая две произвольные точки и точки пересечения с осями координат).
- 3) График функции $y = kx + b$ проходит через точки $A(0; -2)$ и $B(2; 6)$. Найдите величины k и b .

III. Изучение нового материала

Навыки построения графиков линейных функций позволяют строить и графики более сложных зависимостей.

Пример 1

Построим график функции $\frac{y}{x-1} = \frac{2x-1}{x-1}$.

Отметим, что функция имеет смысл только при $x \neq 1$, так как делить на ноль нельзя. Так как дроби $\frac{y}{x-1}$ и $\frac{2x-1}{x-1}$ равны и имеют одинаковые знаменатели, то и числители этих дробей равны, то есть $y = 2x - 1$.

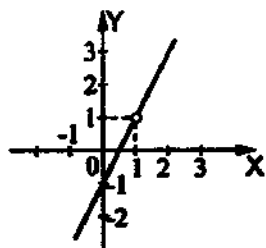


Рис. 1.23

Построим график этой функции и учтем, что $x \neq 1$. Поэтому из графика удалим точку A , для которой абсцисса $x = 1$ (пустой кружок означает отсутствие точки). Область определения этой функции – все числа, кроме $x = 1$; область значений – все числа, кроме $y = 1$.

Пример 2

Построим график функции $\frac{y+x-2}{2x-4} = 1$.

Учтем, что $2x - 4 \neq 0$ (то есть $x \neq 2$). Умножим обе части данного равенства на выражение $y + x - 2 = 2x - 4$ и получим $y = x - 2$. Выразим из этого равенства $y = x - 2$. Построим график этой линейной функции и учтем, что $x \neq 2$ (удаленная точка обозначена пустым кружком).

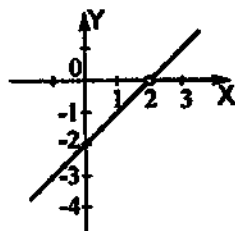


Рис 1.24

Область определения данной функции – все числа, кроме $x = 2$; область значений – все числа, кроме $y = 0$.

Пример 3

Построим график функции $\frac{1}{x-1} + \frac{y+x}{x+2} = 1 + \frac{1}{x-1}$.

Учтем, что $x-1 \neq 0$ (то есть $x \neq 1$) и $x+2 \neq 0$ (то есть $x \neq -2$). Из обеих частей равенства вычтем величину $\frac{1}{x-1}$ и получим $\frac{y+x}{x+2} = 1$. Умножим обе части этого равенства на величину $x+2$ и получим: $y+x = x+2$ или $y = 2$. Построим эту прямую, параллельную оси абсцисс.

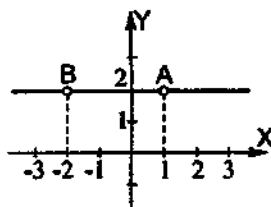


Рис 1.25

Из этой прямой удалим точку A (для которой $x = 1$) и точку B (для которой $x = -2$). Область определения этой функции – все числа, кроме $x = 2$ и $x = 1$; область значений – число $y = 2$.

Пример 4

Построим график функции $y = \begin{cases} -2x+2, & \text{если } x \leq 1, \\ x, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

Сначала построим график функции $y = -2x+2$ (прямая I) и выберем из него участок, для которого абсциссы $x \leq 1$ (сплошная линия). Также построим график $y = x$ (прямая II) и выберем из него часть, для которой абсцисса $x > 1$ (сплошная линия).

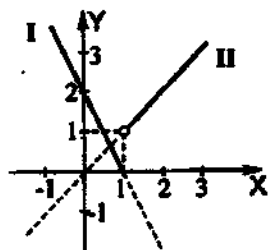


Рис. 1.26

Область определения данной функции – все числа; область значений – неотрицательные числа y .

Пример 5

Построим график функции $y = |x| - 2$.

Используя определение модуля числа, запишем данную функцию в виде: $y = \begin{cases} x - 2, & \text{если } x \geq 0, \\ -x - 2, & \text{если } x < 0. \end{cases}$

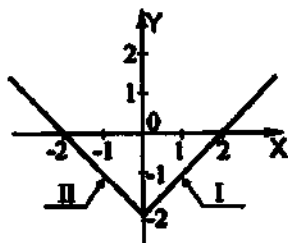


Рис. 1.27

Аналогично предыдущему примеру для значений $x \geq 1$ построим график функции $y = x - 2$ (прямая I), для значений $x < 0$ строим график функции $y = -x - 2$ (прямая II). Область определения данной функции – все числа x , область значений – числа $y > -2$.

IV. Задания на уроке и дома

Постройте графики функций; укажите области определения и значений; найдите точки пересечения графика с осями координат:

1) $3y + 2x = y + x + 1$;

2) $5y + 2x = 4y + 3x + 2$;

3) $\frac{y+x}{2x-3} = 1$;

4) $\frac{y+2}{x-1} = 3$;

5) $\frac{y-3}{x+1} + \frac{5x-1}{x-2} = 1 + \frac{5x-1}{x-2}$;

6) $\frac{2x}{x-1} + \frac{y+2}{x-2} = 2 + \frac{2x}{x-1}$;

7) $\frac{x-1}{y+x} = 1$;

8) $\frac{x+1}{y+x-1} = 1$;

9) $\frac{3x-1}{y+x}=1;$

10) $\frac{3x+1}{y+x-1}=1;$

11) $y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 2, \\ 2, & \text{если } x < 2; \end{cases}$

12) $y = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x > 0; \end{cases}$

13) $y = \begin{cases} -x, & \text{если } x < 1, \\ x-2, & \text{если } x \geq 1; \end{cases}$

14) $y = \begin{cases} 2x, & \text{если } x \leq 1, \\ x-3, & \text{если } x > 1; \end{cases}$

15) $y = |x|;$

16) $y = 1 - |x|;$

17) $y = |x| + x;$

18) $y = |x| - x;$

19) $y = |x| + 2x - 1;$

20) $y = 3x - |x| + 1;$

21) $y = \frac{|x|-1}{x-1};$

22) $y = \frac{|x|}{x} - \frac{x}{|x|} - 1.$

Урок 30. Прямая пропорциональность

Цель: рассмотреть прямую пропорциональную зависимость и ее график.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Построить графики функций:

1) $\frac{y+3x-1}{2y+x}=1;$

2) $y = \begin{cases} x-1, & \text{если } x < 2, \\ 2x-3, & \text{если } x \geq 2; \end{cases}$

3) $y = |x| + 2x;$

4) $y = |2x-4|.$

Вариант 2

Построить графики функций:

1) $\frac{y-2x+1}{2y-x}=1;$

2) $y = \begin{cases} 3-x, & \text{если } x \leq 2, \\ 2x, & \text{если } x > 2; \end{cases}$

3) $y = |x| - 2x;$

4) $y = |6-2x|.$

III. Изучение нового материала

Очень часто приходится рассматривать частный случай линейной функции $y = k \cdot x + b$, когда число $b = 0$. Тогда функцию $y = k \cdot x$ называют **прямой пропорциональной зависимостью** (или **прямой пропорциональностью**), а число k — **коэффициентом пропорциональности**.

Пример 1

При растяжении пружины по закону Гука сила упругости F пропорциональна удлинению пружины l , то есть $F = a \cdot l$ (где коэффициент a определяется материалом, толщиной, закалкой пружины и так далее).

Пример 2

При движении машины с постоянной скоростью v пройденный путь S пропорционален времени движения t машины, то есть $S = v \cdot t$.

Графиком прямой пропорциональности $y = k \cdot x$ будет прямая, проходящая через начало координат.

Действительно, при $x = 0$ величина $y = k \cdot 0 = 0$ при любом значении k . Следовательно, график функции проходит через точку $(0; 0)$ — начало координат. Поэтому для построения графика функции $y = k \cdot x$ достаточно взять еще только одну точку.

Пример 3

Построим график функции $y = -2,5 \cdot x$.

Так как $y = -2,5 \cdot x$ — прямая пропорциональная зависимость, то ее график проходит через начало координат. Найдем еще одну точку, расположенную на графике. Например, для $x = 2$ получаем $y = -2,5 \cdot 2 = -5$. То есть искомая точка $A(2; -5)$.

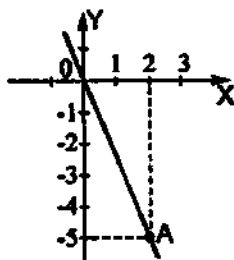


Рис. 1.28

Построим эту точку на координатной плоскости. Через точку A и начало координат с помощью линейки проведем прямую линию, которая будет являться графиком данной функции.

Пример 4

В одной и той же системе координат построим графики функций:

а) $y = x$;

б) $y = 2x$;

в) $y = -2x$.

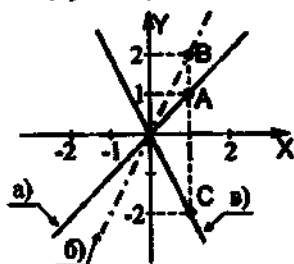


Рис. 1.29

Все три графика проходят через начало координат. Возьмем еще значение $x = 1$. Для функции а) получаем $y = 1$ (точка А (1; 1)); для функции б) $y = 2$ (точка В (1; 2)); для функции в) $y = -2$ (точка С (1; -2)). Теперь построим эти три прямые а, б, в.

Видно, что при положительных значениях k (прямые а и б) графики располагаются в первом и третьем координатных углах. Причем, чем больше значение k , тем быстрее меняется функция (больше угол наклона прямой к оси абсцисс).

При отрицательных значениях k (прямая в) график располагается во втором и четвертом координатных углах.

Таким образом, коэффициент k характеризует расположение графика функции и скорость изменения функции (угол наклона графика к оси абсцисс). Поэтому коэффициент k еще называется угловым коэффициентом.

IV. Задание на уроке

Выполнить упражнения: № 317; 319; 321 (а, б); 323; 325; 326; 329 (а); 330 (а, б).

V. Контрольные вопросы

- Какая функция называется прямой пропорциональной зависимостью?
- Приведите примеры прямых пропорциональных зависимостей.
- На что влияет угловой коэффициент k ?

VI. Задание на дом

№ 318; 320; 321 (в, г); 324; 327; 328; 330 (в-е); 331.

VII. Подведение итогов урока

Урок 31. Взаимное расположение графиков линейных функций

Цель: рассмотреть относительное расположение двух прямых на координатной плоскости.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

- 1) Какая функция называется прямой пропорциональной зависимостью?
- 2) Постройте в одной системе координат графики функций:
 - а) $y = 2,5x$;
 - б) $y = -1,5x$.
- 3) График функции $y = kx$ проходит через точку А (2; -3). Найдите угловой коэффициент k . Пройдет ли график этой функции через точку В (4; -5)?

Вариант 2

- 1) На что влияет угловой коэффициент k ?
- 2) Постройте в одной системе координат графики функций:
 - а) $y = 1,5x$;
 - б) $y = -2,5x$.
- 3) График функции $y = kx$ проходит через точку А (3; -4). Найдите угловой коэффициент k . Пройдет ли график этой функции через точку В (6; -7)?

III. Изучение нового материала

Представим себе две прямые, построенные на координатной плоскости. Очевидно, возможны только три случая их взаимного расположения или прямые пересекаются, или прямые параллельны, или прямые совпадают. Другой возможности представить себе нельзя. Рассмотрим эти три случая на примерах.

Пример 1

Построим графики линейных функций $y = x - 3$ и $y = 2x - 4$.

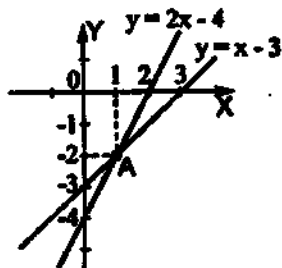


Рис. 1.30

Видно, что построенные прямые пересекаются в точке А. Найдём координаты этой точки. Так как А — точка пересечения прямых, то её координаты $(x_0; y_0)$ удовлетворяют уравнению каждой прямой, то есть выполняются (при подстановке в уравнения прямых) равенства: $y_0 = x_0 - 3$ и $y_0 = 2 \cdot x_0 - 4$. Поскольку в этих равенствах левые части одинаковы, можно приравнять и правые: $x_0 - 3 = 2 \cdot x_0 - 4$. Из этого линейного уравнения находим абсциссу точки пересечения А $x_0 = 1$. Тогда из любого равенства можно найти и ординату точки пересечения, например, $y_0 = x_0 - 3 = 1 - 3 = -2$. Итак, координаты точки пересечения А $(1; -2)$.

Таким образом, если угловые коэффициенты k прямых $y = kx + b$ различны, то эти прямые пересекаются.

Пример 2

Построим графики линейных функций $y = x - 3$ и $y = x + 1$.

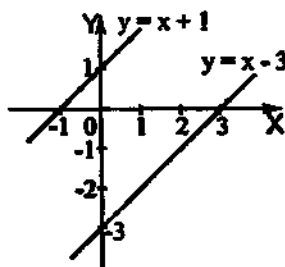


Рис. 1.31

Из рисунка видно, что прямые, задаваемые этими функциями, параллельны.

Таким образом, если угловые коэффициенты k прямых $y = kx + b$ одинаковы, а значения b различны, то эти прямые параллельны.

Пример 3

Построим графики функции $y = x - 3$ и функции, задаваемой уравне-

нием $2y + x = 2x + y - 3$. Прежде всего из уравнения $2y + x = 2x + y - 3$ найдем зависимость $y(x)$. Для этого в левую часть равенства перенесем члены, зависящие от y , а в правую часть — все остальные члены уравнения. Получаем: $2y - y = 2x - 3 - x$ или $y = x - 3$.

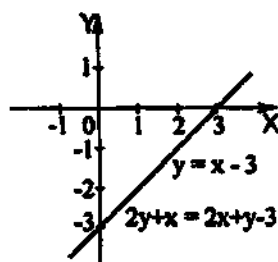


Рис. 1.32

Теперь видно, что графики двух данных функций совпадают.

Таким образом, если угловые коэффициенты k и величины b прямых $y = kx + b$ одинаковы, то эти прямые совпадают.

Обоснуем выводы, сделанные на основании рассмотренных примеров. Пусть даны две линейные функции $y = k_1 \cdot x + b_1$ и $y = k_2 \cdot x + b_2$. Предположим, что они пересекаются в точке C с координатами $(x_0; y_0)$. Тогда эта точка лежит на каждой прямой и ее координаты удовлетворяют уравнению каждой прямой. Поэтому при подстановке значений x_0 и y_0 в уравнения прямых выполняются равенства $y_0 = k_1 \cdot x_0 + b_1$ и $y_0 = k_2 \cdot x_0 + b_2$.

Так как в этих равенствах левые части одинаковы, то можно приравнять и правые: $k_1 \cdot x_0 + b_1 = k_2 \cdot x_0 + b_2$. Получили линейное уравнение для нахождения абсциссы x_0 точки пересечения. Запишем его в виде: $k_1 \cdot x_0 - k_2 \cdot x_0 = b_2 - b_1$. При решении этого уравнения возникают три случая:

1. Если $k_1 - k_2 \neq 0$ (то есть $k_1 \neq k_2$), то уравнение имеет единственное решение. Это означает, что прямые пересекаются (разумеется, в одной точке).
2. Если $k_1 - k_2 = 0$ (то есть $k_1 = k_2$) и $b_2 - b_1 \neq 0$ (то есть $b_1 \neq b_2$), то уравнение решений не имеет. Это означает, что прямые не пересекаются, то есть параллельны.
3. Если $k_1 - k_2 = 0$ (то есть $k_1 = k_2$) и $b_2 - b_1 = 0$ (то есть $b_1 = b_2$), то уравнение имеет бесконечно много решений. Это означает, что прямые имеют бесконечно много общих точек, то есть совпадают.

IV. Задания для учащихся на уроке

№ 335 (г, д); 336; 339; 340 (а, в); 342 (а); 345 (а); 347.

V. Контрольные вопросы

- Каково взаимное расположение двух прямых на плоскости?
- Условие пересечения графиков двух линейных функций?
- При каком условии графики линейных функций параллельны?
- Условие совпадения графиков линейных функций?

VI. Задание на дом

Выполнить упражнения: № 335 (а, б); 337; 341; 342 (б); 343; 345 (б); 346.

VII. Творческие задания

1. При каких значениях параметров графики данных функций пересекаются?

а) $y = 2ax + 5$ и $y = 5x - 2$;

б) $y = (2a - 1)x$ и $y = (4a + 3)x + 2a$;

в) $y = 5ax - 4$ и $y = -ax + 3a$;

г) $y = (3a - 5)x + 6a$ и $y = (3a - 5)x$;

(Ответы: а) $a \neq 2,5$; б) $a \neq -2$; в) $a \neq 0$; г) таких a нет.)

2. При каких значениях параметров графики данных функций параллельны?

а) $y = 3ax + 5$ и $y = 6x - 2$;

б) $y = (3 - a)x + 1$ и $y = (a - 1)x + 5$;

в) $y = (a - 2)x + 2a$ и $y = (3 - 2a)x + a$;

г) $y = (a - 2)x + 6 - a$ и $y = (2a - 3)x + 2a + 3$.

(Ответы: а) $a = 2,5$; б) $a = 2$; в) $a = \frac{5}{3}$; г) таких a нет. д) таких a нет.)

3. При каких значениях параметров графики данных функций совпадают?

а) $y = 2ax + 7$ и $y = 4x + 7$;

б) $y = (5a - 3)x + 2a - 1$ и $y = 2ax + 5 - 4a$;

в) $y = (7 - 2a)x + 6a + 3$ и $y = (a + 1)x + 14 + a$;

г) $y = (5a - 3)x + 3a$ и $y = (5a + 1)x + 3a$.

(Ответы: а) $a = 2$; б) $a = 1$; в) таких a нет. г) таких a нет.)

4. На рисунке приведен график линейной функции. Какой из перечисленных функций он соответствует:

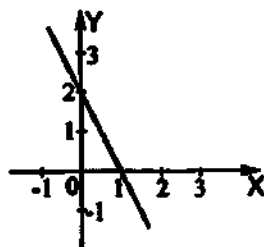


Рис. 1.33

а) $y = 2x + 2$;

б) $y = -2x + 1$;

в) $y = -2x + 2$;

г) $y = -2x + 4$.

(Ответ: $y = -2x + 2$)

5. На рисунках приведены графики некоторых линейных функций. Напишите формулы этих функций.

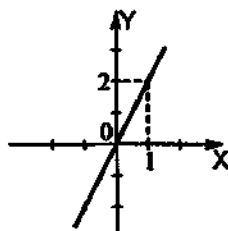


Рис. 1.34а

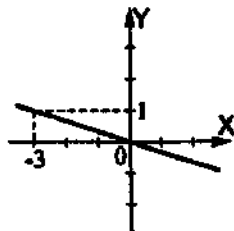


Рис. 1.34б

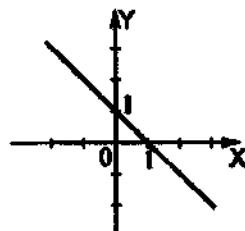


Рис. 1.34в

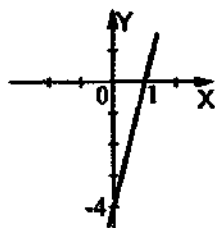


Рис. 1.34г

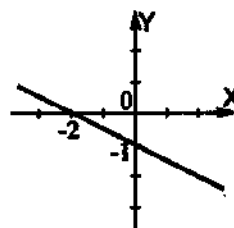


Рис. 1.34д

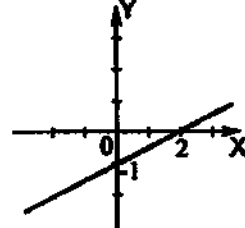


Рис. 1.34е

а) $y = 2x$; б) $y = -\frac{1}{3}x + 1$; в) $y = -x + 1$; г) $y = -4x - 4$; д) $y = -\frac{1}{2}x - 1$;

е) $y = \frac{1}{2}x + 1$.

VIII. Подведение итогов урока

Уроки 32–33. Понятие о графике уравнения

Цели: дать простейшие представления учащимся о графиках уравнений, научить строить графики.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

- 1) Условие пересечения графиков двух линейных функций.
- 2) В какой точке пересекаются графики функций $y=3x-6$ и $y=5x-2$?
- 3) При каком значении параметра a графики функций $y=(3a-2)x+a+2$ и $y=(2-a)x+a-3$ параллельны?

Вариант 2

- 1) Условие параллельности графиков двух линейных функций.
- 2) В какой точке пересекаются графики функций $y=4x+2$ и $y=6x-4$?
- 3) При каком значении параметра a графики функций $y=(2a-3)x+a-2$ и $y=ax+3a-8$ совпадают?

III. Изучение нового материала

До сих пор мы рассматривали только функциональные зависимости (функции). В таких зависимостях каждому значению переменной x соответствовало только одно значение переменной y . В математике встречаются и такие зависимости между переменными x и y , при которых одному значению x может соответствовать более одного значения y . Множество точек (x, y) , связанных такой зависимостью, можно изобразить на координатной плоскости. В этом случае говорят о графике уравнения.

Пример 1

На координатной плоскости изобразите множество таких точек (x, y) , которые удовлетворяют уравнению $x=3$.

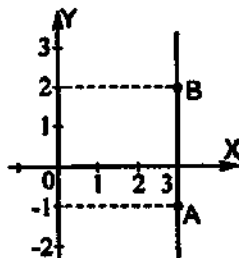


Рис. 1.35

Видно, что в уравнение $x = 3$ переменная y не входит. Поэтому любое значение y будет удовлетворять данному уравнению. Возьмем, например, точки $A(3; -1)$ и $B(3; 2)$. Координаты этих точек удовлетворяют уравнению. Поэтому такие точки принадлежат искомому графику. Через точки A и B проведем прямую. Эта прямая параллельна оси ординат и является графиком уравнения $x = 3$.

Заметим, что раньше мы строили графики функций $y = a$ (где a — некоторое число) и получали прямые параллельные оси абсцисс. Поэтому построенный график аналогичен рассмотренным раньше.

Отметим, что построенный график является именно графиком уравнения (а не функции), так как одному значению переменной x соответствует бесконечно много значений переменной y .

Пример 2

На координатной плоскости изобразить множество таких точек (x, y) , которые удовлетворяют уравнению $(y-1) \cdot (y-x) = 0$.

Сначала из данного уравнения найдем величину y . Если произведение двух множителей равно нулю, то либо первый множитель равен нулю, либо второй множитель равен нулю. Поэтому рассмотрим два случая:

а) $y - 1 = 0$, отсюда $y = 1$. Построим эту прямую, параллельную оси абсцисс;

б) $y - x = 0$, тогда $y = x$. Построим график этой прямой пропорциональной зависимости (биссектриса первого и третьего координатных углов).

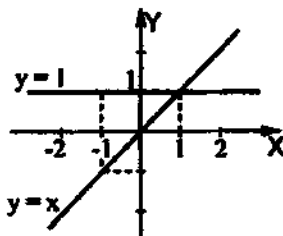


Рис. 1.36

Две пересекающиеся прямые $y = 1$ и $y = x$ являются графиками данного уравнения. Разумеется, построенный график является именно графиком уравнения, а не графиком функции. Например, как видно из рисунка, одному значению $x = -1$ соответствуют два различных значения y : $y = -1$ и $y = 1$.

Пример 3

Построим график уравнения $(2x - 1) \cdot (2x + 4)$.

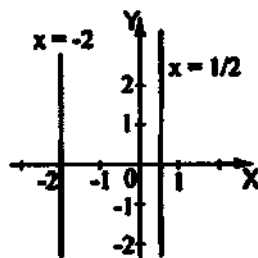


Рис. 1.37

Так как произведение двух множителей равно нулю, то один из множителей должен равняться нулю. Получаем $2x - 1 = 0$ (откуда $x = \frac{1}{2}$) и $2x + 4 = 0$ (тогда $x = -2$). Построим две прямые $x = \frac{1}{2}$ и $x = -2$, параллельные оси ординат, и получим график данного уравнения.

Пример 4

Построим график уравнения $|y| = x$.

Для этого раскроем в уравнении модуль, рассмотрев два случая. Если $y \geq 0$, то уравнение имеет вид $y = x$. Построим прямо пропорциональную зависимость $y = x$ и выберем такие точки на этой прямой, для которых ордината $y \geq 0$ (сплошная прямая).

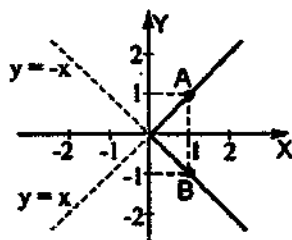


Рис. 1.38

Если $y < 0$, то уравнение имеет вид $-y = x$ или $y = -x$. Построим график этой зависимости. Выберем на этой прямой такие точки, для кото-

рых ордината $y < 0$ (сплошная прямая). Если $y \geq 0$, то уравнение имеет вид $y = x$. Строим график этой зависимости. Выберем на этой прямой такие точки, для которых ордината $y \geq 0$.

Таким образом, графиком данного уравнения будет ломанная АОВ.

Пример 5

Построим график уравнения $y = x \cdot |y|$.

Сначала найдем более простую связь между переменными x и y . Запишем уравнение в виде $0 = x \cdot |y| - y$ и раскроем знак модуля, рассмотрим два случая:

а) если $y \geq 0$, то уравнение имеет вид $0 = y(x-1)$. Это уравнение выполняется, если $y = 0$ или $x = 1$. Величина $y = 0$ удовлетворяет условию $y \geq 0$. Построим эту прямую (ось абсцисс).

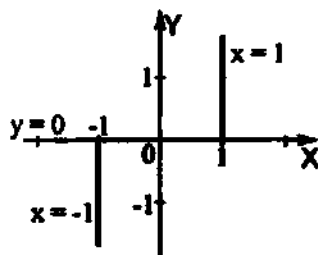


Рис. 1.39

Из графика зависимости $x = 1$ выберем такие точки, для которых ордината $y \geq 0$.

б) если $y < 0$, то уравнение имеет вид $0 = -xy - y$. Так как $y \neq 0$, то разделим все члены уравнения на y и получим $0 = -x - 1$, откуда $x = -1$. Построим эту прямую $x = -1$ и из графика выберем такие точки, для которых ордината $y < 0$.

Таким образом, график данного уравнения состоит из оси абсцисс ($y = 0$) и двух лучей $x = 1$ и $x = -1$. Заметим, что при рассмотрении уравнения и его графика понятия области определения и области значений не вводятся (в отличие от функции). Отметим, что в старших классах будет продолжено рассмотрение графиков уравнений, а также будут рассмотрены графики неравенств.

IV. Задания на урочке и на дом

Постройте на координатной плоскости множество точек $(x; y)$, для которых выполнены равенства:

1. $x^2 = 3$;
2. $x = -2$;
3. $(2x - 5)(x + 1) = 0$;
4. $(3x - 2)(x + 2) = 0$;
5. $(y + 2x)(y + 1) = 0$;
6. $(y + x - 1)(y - 2) = 0$;

7. $(y-x+2)(x+y-1)=0$; 8. $(y+3x-1)(x+2y+3)=0$; 9. $|x-3|=1$;
10. $|x+2|=3$; 11. $|y-1|=x$; 12. $|y-2|=2x$;
13. $|x-y+2|=1$; 14. $|2x+y-4|=3$; 15. $|x-2y|=|5x+y|$;
16. $|y-1|=x$; 17. $|x|+|y|=2$; 18. $|x|+2\cdot|y|=3$;
19. $3\cdot|x|+|y|=4$; 20. $|x-1|+|y|=2$; 21. $|x+y-1|=2$;
22. $|x|-|y|=2$; 23. $|x|+|y|=x+y$; 24. $|x|+|y|=x-y$;
25. $|x-1|+|x-3|=2$; 26. $|x-3|+|x-7|=4$; 27. $|y-3|=1$;
28. $2\cdot|3-2y|=5$; 29. $|y+1|+|y-2|=3$; 30. $|y+2|+|y-1|=3$.

Уроки 34–35. Контрольная работа № 3 по теме «Функции»

Контрольная работа составлена в шести вариантах (варианты 1, 2 – самые простые; варианты 5, 6 – самые сложные). Степень сложности меняется не слишком резко. Поэтому можно рекомендовать следующий критерий оценки: при решении вариантов 1, 2 оценка 3 ставится за любые три решенные задачи, оценка 4 – за четыре задачи и оценка 5 – за пять задач. Одна задача дает школьникам некоторую свободу выбора. При тех же критериях оценки за решение вариантов 3, 4 добавляется к набранному баллу дополнительно 0,5 балла; за решение вариантов 5, 6 – дополнительно – 1,0 балла (то есть оценка 5 ставится уже за 4 задачи). Все задачи в варианте примерно равноценны, может быть несколько тяжелее задачи 5, 6.

Перед проведением контрольной работы учащихся целесообразно ознакомить с критериями оценки и разной сложностью вариантов. Выбор вариантов может быть осуществлен учителем или предоставлен учащимся (в этом случае предполагается наличие копировальной техники в школе и избыточное количество заданий работы). После урока-разбора контрольной решение всех задач шести вариантов может быть вывешено на стенде. Разумеется, разобрать такое количество задач на уроке невозможно (да и не нужно).

Вариант I

1. Функция задана формулой $y=2x+3$. Принадлежат ли графику функции точки А (1; 5) и В (–1; –1)?
2. Постройте график функции $y=-4x+3$ и укажите координаты точек пересечения графика с осями координат.
3. Постройте график зависимости $y=kx$, если он проходит через точку А (–2; 4). Найдите угловой коэффициент k .

4. При каком значении параметра a график функций $y = 3x - 2$ и $y = 7 + (a - 2)x$ параллельны?
5. Найдите точку пересечения графиков функций $y = 3$ и $y = 2x - 1$.
6. Постройте график уравнения $|x + 1| = 2$.

Вариант II

1. Функция задана формулой $y = -2x + 5$. Принадлежат ли графику функции точки $A(1; 3)$ и $B(-1; 6)$?
2. Постройте график функции $y = 3x + 4$ и укажите координаты точек пересечения графика с осями координат.
3. Постройте график зависимости $y = kx$, если он проходит через точку $A(2; -6)$. Найдите угловой коэффициент k .
4. При каком значении параметра a графики функций $y = 5x + 3$ и $y = -4 + (a + 3)x$ параллельны?
5. Найдите точку пересечения графиков функции $y = -1$ и $y = 3x + 2$.
6. Постройте график уравнения $|x - 2| = 1$.

Вариант III

1. Функция задана формулой $y = 2x^2 + |x| + 1$. Принадлежат ли графику функции точки $A(1; 4)$ и $B(-1; 5)$? Найдите точку пересечения графика с осью ординат.
2. Постройте график функции $y = |x| - 1$ и укажите координаты точек пересечения графика с осями координат.
3. Постройте график функции $\frac{y+1}{x-1} = \frac{5-2x}{x-1}$.
4. При каком значении параметра a графики функций $y = 6x - 3$ и $y = 2x - 4$. Постройте эти графики.
5. Найдите точку пересечения графиков функций $y = -2x$ и $y = 3x + 2$. Постройте эти графики.
6. Постройте график уравнения $|x| + 2|y| = 2$.

Вариант IV

1. Функция задана формулой $y = 2|x| - x^2 + 3$. Принадлежат ли графику функции точки $A(1; 4)$ и $B(-1; 3)$? Найдите точку пересечения графика с осью координат.
2. Постройте график функции $y = 1 - |x|$ и укажите координаты точек пересечения графика с осями координат.
3. Постройте график функции $\frac{y-1}{x+1} = \frac{3+2x}{x+1}$.

4. При каком значении параметра a графики функций $y = 4x + 5$ и $y = 1 - 2a - (3a + 2)x$ параллельны?
5. Найдите точку пересечения графиков функций $y = 2x$ и $y = 6 - x$. Постройте эти графики.
6. Постройте график уравнения $2|x| + |y| = 2$.

Вариант V

1. График линейной функции $y = kx + b$ проходит через точки $A(0; -3)$ и $B(2; 0)$. Постройте график функции и определите функцию (найдите k и b).
2. Укажите координаты точек пересечения графика функции $y = 2x^2 + 3x$ с осями координат.
3. Найдите координаты точки графика функции $y = 3x - 7$, если эти координаты равны. Постройте график и укажите найденную точку.
4. Постройте график уравнения $|y = 2x + 1| = 2$.
5. Найдите точку пересечения графиков функций $y = 7x - 31$ и $y = 2x - 6$.
6. Постройте график уравнения $|x + 1| + |x - 1| = 2$.

Вариант VI

1. График линейной функции $y = kx + b$ проходит через точки $A(0; 2)$ и $B(-3; 0)$. Постройте график функции и определите функцию (найдите k и b).
2. Укажите координаты точек пересечения графика функции $y = 3x^2 + 2x$ с осями координат.
3. Найдите координаты точки графика функции $y = -3x + 5$, если эти координаты равны. Постройте график и укажите найденную точку.
4. Постройте график уравнения $|y + 2x - 2| = 1$.
5. Найдите точку пересечения графиков функций $y = 9x - 43$ и $y = 3x - 7$.
6. Постройте график уравнения $|y - 1| + |y + 1| = 2$.

Урок 36. Анализ контрольной работы

Ход урока

I. Подведение итогов контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Удобно данные заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи/Итоги	1	2	3	...	6
+	5				
±	1				
.	1				
Ø	1				

Обозначения:

++ -- число решивших задачу правильно или почти правильно;

± -- число решивших задачу со значительными погрешностями;

-- -- число не решивших задачу;

Ø -- число не решавших задачу.

Варианты 1, 2 – 8 учащихся.

2. Типичные ошибки при решении задач.

3. Задачи, вызвавшие наибольшие трудности, и их разбор (учителем или школьниками, решившими эту задачу).

II. Разбор задач вариантов

Вариант I

1. А принадлежит, В – не принадлежит.

2.

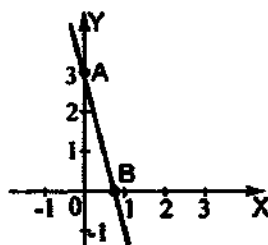


Рис. 1.40

$$A(0; 3), B\left(\frac{3}{4}; 0\right);$$

3.

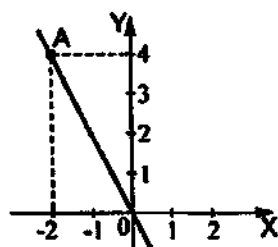


Рис. 1.41

$$k = -2.$$

$$4. a = 5.$$

$$5. A(2; 3).$$

6.

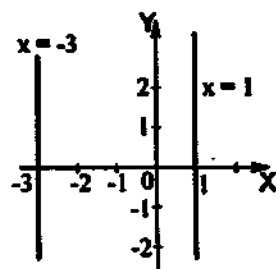


Рис. 1.42

Вариант II

1. А принадлежит, В – не принадлежит.

2.

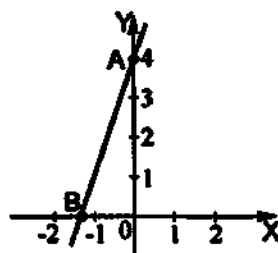


Рис. 1.43

$$A(0; 4), B\left(-\frac{4}{3}; 0\right);$$

3.

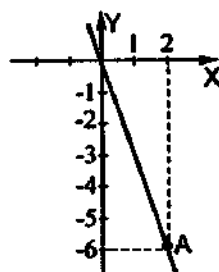


Рис. 1.44

$$k = -3.$$

$$4. a = 2.$$

$$5. A(-1; -1).$$

6.

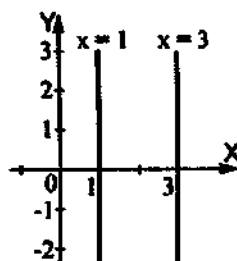


Рис. 1.45

Вариант III

1. A принадлежит, B – не принадлежит, C (0; 1).

2.

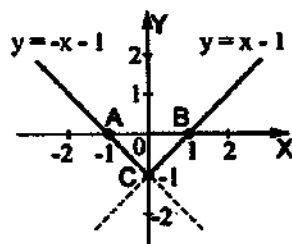


Рис. 1.46

A (-1; 0), B (1; 0), C (0; -1).

3.

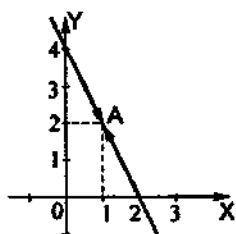


Рис. 1.47

4. Таких a нет.

5.

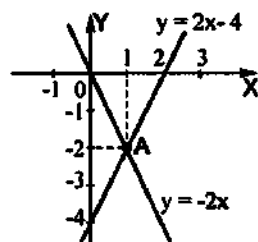


Рис. 1.48

A (1; -2).

6.

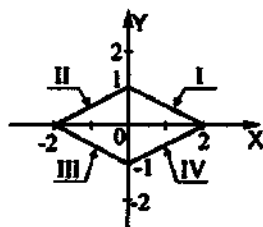


Рис. 1.49

Вариант IV

1. A принадлежит, B – не принадлежит, C (0; 3).

2.

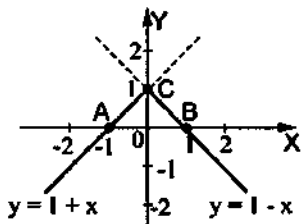


Рис. 1.50

A (-1; 0), B (1; 0), C (0; 1).

3.

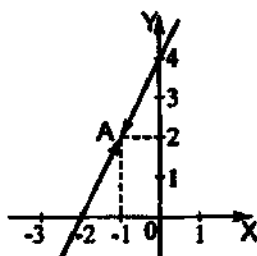


Рис. 1.51

4. Таких a нет.

5.

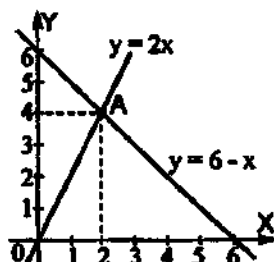


Рис. 1.52

A (2; 4).

6.

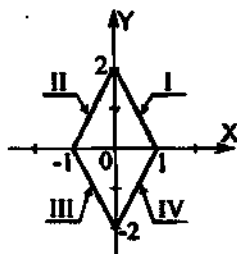


Рис. 1.53

Вариант V**1. Решение**

Даны точки A (0; -3) и B (2; 0) – точки пересечения графика линейной функции $y = kx + b$ с осями координат. Построим эти точки и проведем через них прямую.

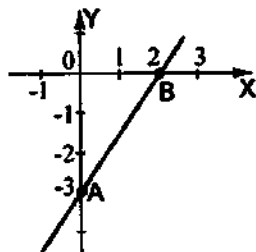


Рис. 1.54

Так как прямая проходит через точку А, то подставим ее координаты в функцию и получим $-3 = k \cdot 0 + b$, откуда $b = -3$. Тогда функция имеет вид $y = kx - 3$. Подставим координаты точки В в функцию $0 = k \cdot 2 - 3$, откуда $k = \frac{3}{2} = 1,5$. Значит, функция имеет вид $y = 1,5x - 3$.

(Ответ: $y = 1,5x - 3$.)

2. Решение

Найдем координаты точек пересечения графика функции $y = 2x^2 + 3$ с осями координат. Для нахождения точек пересечения с осью абсцисс положим $y = 0$ и получим уравнение $0 = 2x^2 + 3x$. Используя распределительное свойство, запишем уравнение в виде $0 = x(2x + 3)$. Так как произведение множителей равно нулю, то один из них равен нулю. Получаем $x = 0$ и $2x + 3 = 0$ (откуда $x = -\frac{3}{2}$). Итак, точки пересечения с осью абсцисс А (0; 0) и В $(-\frac{3}{2}; 0)$. Так как точка А – начало координат, то эта точка одновременно и точка пересечения графика функции с осью ординат.

(Ответ: А (0; 0), В $(-\frac{3}{2}; 0)$.)

3. Решение

На графике функции $y = 3x - 7$ есть точка А, координаты которой равны, то есть $x = a$ и $y = a$. Эти координаты должны удовлетворять уравнению функции. Подставив их, получаем $a = 3a - 7$, откуда $a = 3,5$. Итак, точка имеет координаты А (3,5; 3,5). Построим график функции $y = 3x - 7$ и отметим на нем точку А.

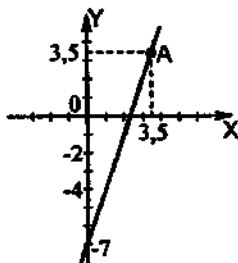


Рис. 1.55

(Ответ: А (3,5; 3,5).)

4. Решение

Построим график уравнения $|y - 2x + 1| = 2$.

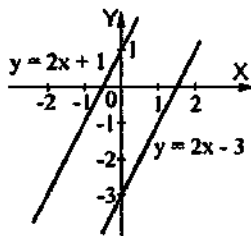


Рис. 1.56

Если модуль некоторой величины равен 2, то сама величина может равняться 2 или -2 . Рассмотрим эти случаи.

Если $y - 2x + 1 = 2$, то $y = 2x + 1$.

Если $y - 2x + 1 = -2$, то $y = 2x - 3$.

Построим две параллельные прямые $y = 2x + 1$ и $y = 2x - 3$, которые являются графиком данного уравнения.

5. Решение

Пусть А (x_0 ; y_0) — точка пересечения графиков функций $y = 7x - 31$ и $y = 2x - 6$. Так как точка А принадлежит графику каждой функции, то ее координаты удовлетворяют каждой функции, то есть выполняются равенства $y_0 = 7 \cdot x_0 - 31$ и $y_0 = 2 \cdot x_0 - 6$. В этих равенствах одинаковые левые части. Поэтому приравняем правые части. Получаем уравнение $7 \cdot x_0 - 31 = 2 \cdot x_0 - 6$ для нахождения абсциссы точки пересечения. Запишем уравнение в виде $7 \cdot x_0 - 2 \cdot x_0 = 31 - 6$ или $5 \cdot x_0 = 25$ и найдем $x_0 = 5$. Теперь из любого уравнения, например из первого, определяем $y_0 = 7 \cdot x_0 - 31 = 7 \cdot 5 - 31 = 4$. Итак, координаты точки А (5; 4).

(Ответ: А (5; 4).)

6. Решение

Для построения графика уравнения $|x+1|+|x-1|=2$ учтем геометрический смысл модуля. Величина $|x+1|=|x-(-1)|$ – расстояние от точки x до точки -1 на координатной оси; величина $|x-1|$ – расстояние от точки x до точки 1 .



Рис. 1.57

Тогда геометрический смысл выражения $|x+1|+|x-1|$ – сумма расстояний от точки x до точек -1 и 1 . Из рисунка видно, что сумма таких расстояний будет равна 2, если точка x располагается между точками -1 и 1 на координатной оси, то есть $-1 \leq x \leq 1$. Теперь на координатной плоскости построим множество таких точек.

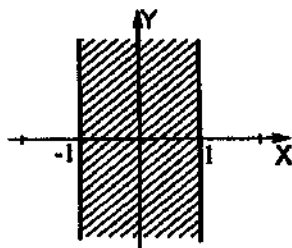


Рис. 1.58

Сначала строим две параллельные прямые $x = -1$ и $x = 1$ (границы области). При этом координата y может быть любой. Тогда условию $-1 \leq x \leq 1$ удовлетворяют все точки плоскости, расположенные между построенными прямыми $x = -1$ и $x = 1$ и на них (эти точки заштрихованы).

Вариант VI**1. Решение**

Даны точки $A(0; 2)$ и $B(-3; 0)$ – точки пересечения графика линейной функции $y=kx+b$ с осями координат. Построим эти точки и проведем через них прямую.

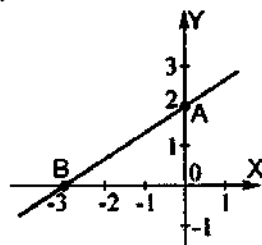


Рис. 1.59

Так как прямая проходит через точку А, то подставим ее координаты в функцию и получим $2 = k \cdot 0 + b$, откуда $b = 2$. Тогда функция имеет вид $y = kx + 2$. Подставим координаты точки В в эту функцию $0 = k(-3) + 2$, откуда $k = \frac{2}{3}$. Значит, функция имеет вид $y = \frac{2}{3}x + 2$.

(Ответ: $y = \frac{2}{3}x + 2$.)

2. Решение

Найдем координаты точек пересечения графика функции $y = 3x^2 + 2x$ с осями координат. Для нахождения точек пересечения с осью абсцисс положим $y = 0$ и получим уравнение $0 = 3x^2 + 2x$. Используя распределительное свойство, запишем уравнение в виде $0 = x(3x + 2)$. Так как произведение множителей равно нулю, то один из них равен нулю. Получаем $x = 0$ и $3x + 2 = 0$ (откуда $x = -\frac{2}{3}$). Итак, точки пересечения с осью абсцисс

А (0; 0) и В $(-\frac{2}{3}; 0)$. Так как точка А – начало координат, то эта точка одновременно и точка пересечения графика функции с осью ординат.

(Ответ: А (0; 0) и В $(-\frac{2}{3}; 0)$.)

3. Решение

На графике функции $y = -3x - 5$ есть точка А, координаты которой равны, то есть $x = a$ и $y = a$. Эти координаты удовлетворяют уравнению функции. Подставим их, получаем $a = -3a + 5$, откуда $a = \frac{5}{4}$. Итак, точка имеет координаты А $(\frac{5}{4}; \frac{5}{4})$. Построим график функции $y = -3x - 5$ и отметим на нем точку А.

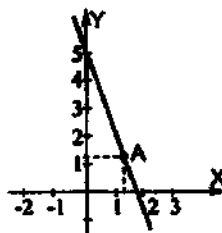


Рис. 1.60

(Ответ: А $(\frac{5}{4}; \frac{5}{4})$.)

4. Решение

Построим график уравнения $|y + 2x - 2| = 1$. Если модуль некоторой величины равен 1, то сама величина может равняться 1 или -1 . Рассмотрим эти случаи.

Если $y + 2x - 2 = 1$, то $y = -2x + 3$.

Если $y + 2x - 2 = -1$, то $y = -2x + 1$.

Построим две параллельные прямые $y = -2x + 3$ и $y = -2x + 1$, которые являются графиком данного уравнения.

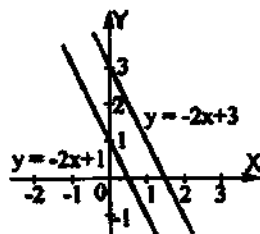


Рис. 1.61

5. Решение

Пусть $A(x_0; y_0)$ – точка пересечения графиков функций $y = 9x - 43$ и $y = 3x - 7$. Так как точка A принадлежит графику каждой функции, то ее координаты удовлетворяют каждой функции, то есть выполняются равенства $y_0 = 9 \cdot x_0 - 43$ и $y_0 = 3 \cdot x_0 - 7$. В этих равенствах одинаковые левые части. Поэтому приравняем правые части. Получаем уравнение $9 \cdot x_0 - 43 = 3 \cdot x_0 - 7$ для нахождения абсциссы точки пересечения. Запишем уравнение в виде $9 \cdot x_0 - 3 \cdot x_0 = 43 - 7$ или $6 \cdot x_0 = 36$ и найдем $x_0 = 6$. Теперь из любого уравнения, например из первого, определяем $y_0 = 9 \cdot x_0 - 43 = 9 \cdot 6 - 43 = 11$. Итак, координаты точки $A(6; 11)$.

(Ответ: $A(6; 11)$.)

6. Решение

Для построения графика уравнения $|y - 1| + |y + 1| = 2$ учтем геометрический смысл модуля. Величина $|y - 1|$ – расстояние от точки y до точки 1 на координатной оси; величина $|y + 1| = |y - (-1)|$ – расстояние от точки y до точки -1 .

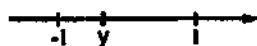


Рис. 1.62

Тогда геометрический смысл выражения $|y - 1| + |y + 1|$ – суммарное расстояние от точки y до точек 1 и -1 .

Из рисунка видно, что сумма таких расстояний будет равна 2, если точка y располагается между точками -1 и 1 на координатной оси, то есть $-1 \leq y \leq 1$. Теперь на координатной плоскости построим множество таких точек.

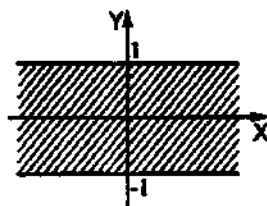


Рис. 1.63

Сначала строим две параллельные прямые $y = -1$ и $y = 1$ (границы области). При этом координата x может быть любой. Тогда условию $-1 \leq y \leq 1$ удовлетворяют все точки плоскости, расположенные между построенными прямыми $y = -1$ и $y = 1$ и на них (эти точки заштрихованы).

Урок 37. Подготовка к тематическому зачету

Цель: повторить решение задач по теме «Функции и их графики».

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Основные понятия

При решении задач напомнить нужные сведения из раздела 4 (уроки 23–26).

III. Задания на уроке

№ 351 (а), 352, 354, 355, 358 (а), 360, 361 (б), 362 (а), 364 (а–в).

IV. Задание на дом

№ 351 (б), 353, 357, 358 (б), 359, 361 (в), 362 (б), 364 (г–е).

Урок 38. Подготовка к тематическому зачету

Цель: повторить решение задач по теме «Линейная функция».

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Основные понятия

При решении задач напомнить нужные сведения из раздела 5 (уроки 27–33).

III. Задание на уроке

№ 365 (а, в, г); 367 (а); 369; 370 (а, в); 373 (а, б); 376; 378 (б, с); 379 (а); 381; 383 (а).

IV. Задание на дом

№ 365 (б, д, е); 367 (б); 368; 370 (б, г); 373 (в, г); 374; 375; 378 (а, д); 379 (б); 380; 383 (б).

V. Подведение итогов урока**Уроки 39–40. Зачет по теме «Функции»**

Цели: сравнение успеваемости учащихся при одинаковой сложности заданий, возможность повышения оценок за выполненные контрольные работы.

Ход урока**I. Сообщение темы и цели урока****II. Характеристика зачетной работы**

Работа составлена в двух равноценных вариантах. По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий. Соответственно у учащихся возрастает возможность выбора задач. Все задания разбиты на три блока А, В и С. Самые простые задачи находятся в части А, более сложные – в части В, еще сложнее – в части С. Каждая задача из А оценивается в 1 балл, из В – в два балла, из С – в три балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка 3 ставится за 6 баллов, оценка 4 – за 10 баллов, оценка 5 – за 14 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Поэтому разбору заданий работы занятия можно и не посвящать (решения задач могут быть вывешены на стенде).

Вариант I**А.**

1. Дана функция $y = 2x - 3$. Найдите:

- а) значение функции при $x = -1$;
- б) значение аргумента, при котором значение функции $y = -7$.

2. Определите точки пересечения графика функции $y = -3x + 5$ с осями координат.

3. Принадлежит ли графику функции $y = 3x - |x + 1|$ точка:

- а) А (-1; -3);
- б) В (2; 4)?

4. Постройте график функции $\frac{y}{x} = \frac{-2x - 2}{x}$.

5. Постройте график функции $y = k \cdot x$ и определите угловой коэффициент k , если график проходит через точку $A(-6; -3)$.

6. Поезд первоначально находится на расстоянии 30 км от города и удаляется от него со скоростью 40 км/ч. Задайте формулой расстояние S от города до поезда в зависимости от времени движения t .

7. График функции параллелен прямой $y = 3x - 7$ и проходит через точку $A(2; 1)$. Задайте формулой эту функцию.

8. Определите точки пересечения графика функции $y = \frac{2x-4}{x^2+1}$ с осями координат.

9. Найдите точку пересечения графиков функций $y = 5x - 3$ и $y = 7x - 19$.

10. Постройте график функции $y = \begin{cases} x-3, & \text{если } x \leq 1, \\ -2x, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

11. Постройте график уравнения $y = |2x - 4| + |y - 3| = 0$.

С.

12. Графики функций $y = (2a - 3)x + a - 7$ и $y = (4a - 1)x + 5 - 3a$ параллельны. Найдите значение параметра a и формулу каждой функции.

13. Постройте график функции $y = |x| + \frac{|x|}{x}$.

14. Постройте график уравнения $|y - x| + x = 2$.

Вариант II

А.

1. Дана функция $y = 3x - 4$. Найдите:

а) значение функции при $x = -1$;

б) значение аргумента, при котором значение функции $y = -10$.

2. Определите точки пересечения графика функции $y = -2x + 7$ с осями координат.

3. Принадлежит ли графику функции $y = 4x - |x + 2|$ точка:

а) $A(-1; -3)$;

б) $B(2; 6)$?

4. Постройте график функции $\frac{y}{x} = \frac{-3x-1}{x}$.

5. Постройте график функции $y = k \cdot x$ и определите угловой коэффициент k , если график проходит через точку $A(-3; -4)$.

6. Поезд первоначально находится на расстоянии 40 км от города и удаляется от него со скоростью 30 км/ч. Задайте формулой расстояние S от города до поезда в зависимости от времени движения t .

7. График функции параллелен прямой $y = 2x - 6$ и проходит через точку $A(3; 2)$. Задайте формулой эту функцию.

8. Определите точки пересечения графика функции $y = \frac{3x-6}{x^2+2}$ с осями координат.

9. Найдите точку пересечения графиков функций $y=3x-14$ и $y=5x-6$.

10. Постройте график функции $y = \begin{cases} x+1, & \text{если } x \leq 1, \\ 2x, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

11. Постройте график уравнения $y = |4-2x| + |y-1| = 0$.

С.

12. Графики функций $y = (3a+2)x + 2a - 1$ и $y = (a-2)x + 3 - 4a$ параллельны. Найдите значение параметра a и формулу каждой функции.

13. Постройте график функции $y = |x| - \frac{|x|}{x}$.

14. Постройте график уравнения $|y+x| - x = 3$.

III. Разбор заданий

Вариант I

1. Решение

Дана функция $y = 2x - 3$.

а) Найдём значение функции при $x = -1$. Для этого в формулу функции вместо x подставим число -1 и получим $y = 2(-1) - 3 = -2 - 3 = -5$.

б) Найдём значение аргумента, при котором значение функции $y = -7$. Для этого в формулу функции вместо y подставим число -7 и получим линейное уравнение: $-7 = 2x - 3$ или $-4 = 2x$, откуда $x = -2$.

(Ответ: а) $y = -5$; б) $x = -2$.)

2. Решение

Найдём точки пересечения графика функции $y = -3x + 5$ с осями координат. Сначала определим точку пересечения с осью ординат. Так как любая точка на оси ординат имеет нулевую абсциссу, то подставим значение $x = 0$ в формулу функции и получим $y = -3 \cdot 0 + 5 = 5$. Итак, точка пересечения с осью ординат имеет координаты $A(0; 5)$.

Найдём точку пересечения графика с осью абсцисс. Так как любая точка на оси абсцисс имеет нулевую ординату, то подставим значение $y = 0$ в формулу функции и получим линейное уравнение: $0 = -3x + 5$ или $3x = 5$, откуда $x = \frac{5}{3}$. Итак, точка пересечения с осью абсцисс имеет

координаты $B\left(\frac{5}{3}; 0\right)$.

(Ответ: $A(0; 5)$, $B\left(\frac{5}{3}; 0\right)$.)

3. Решение

Для функции $y = 3x - |x| + 1$ найдем значение функции при значении аргумента, равном абсциссе данной точки.

а) При $x = -1$ получаем $y = 3(-1) - |-1| + 1 = -3 - 1 + 1 = -3$. Так как значение функции равно ординате точки А $(-1; -3)$, то точка А принадлежит графику функции.

б) При $x = 2$ получаем $y = 3 \cdot 2 - |2| + 1 = 6 - 2 + 1 = 5$. Так как значение функции не равно ординате точки В $(2; 4)$, то точка В не принадлежит графику функции.

(Ответ: А принадлежит, В – не принадлежит.)

4. Решение

При построении графика функции $\frac{y}{x} = \frac{-2x-2}{x}$ учтем, что $x \neq 0$.

Умножим обе части данного равенства на x и получим $-2x - 2$. Построим график этой линейной функции, определив, например, точки пересечения графика с осями координат.

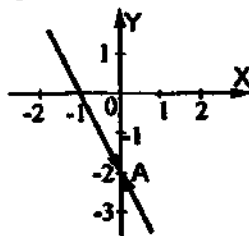


Рис. 1.64

Из графика удалим точку А, абсцисса которой равна нулю (эта точка показана стрелками).

5. Решение

На координатной плоскости построим точку А $(-6; -3)$.

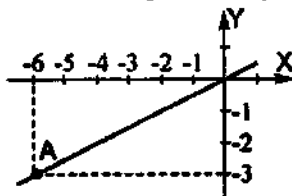


Рис. 1.65

Так как функция $y = kx$ – прямая пропорциональная зависимость, то ее график проходит через начало координат. Поэтому через начало координат и точку А проведем прямую – график данной функции. Так как график проходит через точку А, то ее координаты удовлетворяют урав-

иснию функции. Поэтому получаем: $-3 = k(-6)$, откуда $k = \frac{1}{2}$.

(Ответ: $k = \frac{1}{2}$.)

6. Решение

Пусть первоначально поезд находится в точке В на расстоянии 30 км от города (точка А).

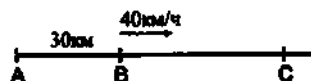


Рис. 1.66

Двигаясь со скоростью 40 км/ч поезд за время t ч проедет расстояние $BC = 40 \cdot t$. Тогда расстояние поезда от города $S = AC = AB + BC = 30 + 40 \cdot t$ км.

(Ответ: $S = 30 + 40 \cdot t$.)

7. Решение

Так как график функции параллелен прямой $y = 3x - 7$, то угловой коэффициент данной функции такой же (то есть $k = 3$). Поэтому функция имеет вид $y = 3x + b$. Найдем величину b . Так как график функции проходит через точку А (2; 1), то ее координаты удовлетворяют уравнению функции: $1 = 3 \cdot 2 + b$ или $1 = 6 + b$, откуда $b = -5$. Итак, искомая функция $y = 3x - 5$.

(Ответ: $y = 3x - 5$.)

8. Решение

Определим точки пересечения графика функции $y = \frac{2x-4}{x^2+1}$ с осями координат. Точка пересечения с осью ординат имеет абсциссу, равную нулю. Поэтому подставим значение $x = 0$ в функцию и получим $y = \frac{2 \cdot 0 - 4}{0^2 + 1} = \frac{-4}{1} = -4$. Итак, координаты точки пересечения с осью ординат А (0; -4). Точка пересечения с осью абсцисс имеет нулевую ординату. Поэтому подставим значение $y = 0$ в функцию и получим уравнение $0 = \frac{2x-4}{x^2+1}$. Дробь равна нулю, если ее числитель равен нулю $0 = 2x - 4$ (а знаменатель при этом в нуль не обращается), откуда $x = 2$. Поэтому координаты точки пересечения с осью абсцисс В (2; 0).

(Ответ: А (0; -4), В (2; 0).)

9. Решение

Пусть А (x_0 , y_0) – точка пересечения графиков функций $y = 5x - 3$ и

$y = 7x - 19$. Эта точка принадлежит каждому графику и ее координаты удовлетворяют каждой функции, то есть выполняются равенства $y_0 = 5 \cdot x_0 - 3$ и $y_0 = 7 \cdot x_0 - 19$. Так как левые части одинаковы, то равны и правые части. Получаем линейное уравнение: $5 \cdot x_0 - 3 = 7 \cdot x_0 - 19$ или $16 = 2 \cdot x_0$, откуда абсцисса точки пересечения $x_0 = 8$. Теперь из любого равенства, например из первого, найдем ординату $y_0 = 5 \cdot x_0 - 3 = 5 \cdot 8 - 3 = 40 - 3 = 37$. Итак, координаты точки пересечения $A(8; 37)$.

(Ответ: $A(8; 37)$.)

10. Решение

Построим график данной функции.

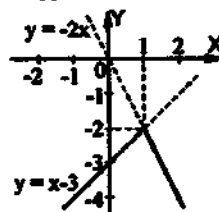


Рис. 1.67

Сначала строим график функции $y = x - 3$ и выбираем из него те точки, абсциссы которых $x \leq 1$ (сплошная линия). Потом строим график функции $y = -2x$ и выбираем из него те точки, абсциссы которых $x > 1$ (сплошная линия).

11. Решение

Так как модуль любого выражения величина неотрицательная, то уравнение $|2x - 4| + |y - 3| = 0$ выполняется только в случае $|2x - 4| = 0$ и $|y - 3| = 0$. Модуль величины равен нулю, если сама величина равна нулю. Поэтому получаем уравнение: $2x - 4 = 0$ (откуда $x = 2$) и $y - 3 = 0$ (тогда $y = 3$).

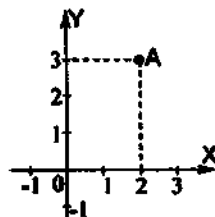


Рис. 1.68

Итак, графиком данного уравнения является единственная точка $A(2; 3)$.

12. Решение

Графики линейных функций $y = kx + b$ параллельны, если выполне-

ны условия: $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$. Для данных функций $y = (2a-3)x + a - 7$ и $y = (4a-1)x + 5 - 3a$ получаем условия: $2a-3 = 4a-1$ и $a-7 \neq 5-3a$. Решим уравнение $2a-3 = 4a-1$. Получаем $-2 = 2a$, откуда $a = -1$. Проверим, что выполняется неравенство $a-7 \neq 5-3a$. Подставим значение $a = -1$ в левую и правую части и получим верное неравенство $-1-7 \neq 5-3 \cdot (-1)$ или $-8 \neq 8$. Теперь подставим $a = -1$ в данные функции и определим их: $y = (2 \cdot (-1) - 3)x + (-1) - 7$ и $y = (4 \cdot (-1) - 1)x + 5 - 3 \cdot (-1)$ или $y = -5x - 8$ и $y = -5x + 8$.

(Ответ: $a = -1$, $y = -5x - 8$, $y = -5x + 8$.)

13. Решение

Построим график функции $y = |x| + \frac{|x|}{x}$. Учтем, что $x \neq 0$ и раскроем знак модуля. Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и функция имеет вид: $y = -x + \frac{-x}{x}$ или $y = -x - 1$. Построим график этой функции при $x < 0$.

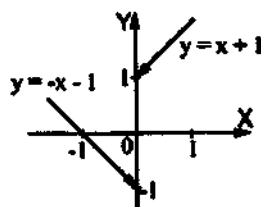


Рис. 1.69

Если $x > 0$, $|x| = x$ и функция имеет вид: $y = x + \frac{x}{x}$ или $y = x + 1$. Построим график этой функции при $x > 0$. Стрелками показано, что при $x = 0$ функция не определена (не имеет смысла).

14. Решение

Для построения графика уравнения $|y-x| + x = 2$ раскроем знак модуля, рассмотрев два случая.

а) Если $y-x < 0$, то $|y-x| = -(y-x) = x-y$ и уравнение имеет вид $x-y+x=2$, откуда $y=2x-2$. Подставим эту величину y в неравенство $y-x < 0$ и получим $2x-2x < 0$ или $x-2 < 0$. Это неравенство выполняется при $x < 2$. Построим график функции $y=2x-2$ при $x < 2$.

б) Если $y-x \geq 0$, то $|y-x| = y-x$ и уравнение имеет вид $y-x+x=2$, откуда $y=2$. Подставим эту величину y в неравенство $y-x \geq 0$ и получим $2-x \geq 0$. Это неравенство выполняется при $x \leq 2$.

Построим график функции $y = 2$ при $x \leq 2$.

В результате рассмотрения двух случаев получаем график данного уравнения.

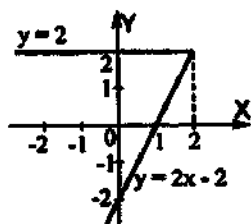


Рис. 1.70

Вариант II

1. Решение

Дана функция $y = 3x - 4$.

а) Найдем значение функции при $x = -1$. Для этого в формулу функции вместо x подставим число -1 и получим $y = 3(-1) - 4 = -3 - 4 = -7$.

б) Найдем значение аргумента, при котором значение функции $y = -10$. Для этого в формулу функции вместо y подставим число -10 и получим линейное уравнение: $-10 = 3x - 4$ или $-6 = 3x$, откуда $x = -2$.

(Ответ: а) $y = -7$; б) $x = -2$.)

2. Решение

Найдем точки пересечения графика функции $y = -2x + 7$ с осями координат. Так как любая точка на оси ординат имеет нулевую абсциссу, то подставим значение $x = 0$ в формулу функции и получим $y = -2 \cdot 0 + 7 = 7$. Итак, точка пересечения с осью ординат имеет координаты $A(0; 7)$.

Найдем точку пересечения графика с осью абсцисс. Так как любая точка на оси абсцисс имеет нулевую ординату, то подставим значение $y = 0$ в формулу функции и получим линейное уравнение: $0 = -2x + 7$ или $2x = 7$, откуда $x = 3,5$. Итак, точка пересечения с осью абсцисс имеет координаты $B(3,5; 0)$.

(Ответ: $A(0; 7)$, $B(3,5; 0)$.)

3. Решение

Для функции $y = 4x - |x| + 2$ найдем значение функции при значении аргумента, равном абсциссе данной точки.

а) При $x = -1$ получаем $y = 4(-1) - |-1| + 2 = -4 - 1 + 2 = -3$. Так как значение функции равно ординате точки $A(-1; -3)$, то точка A принадлежит графику функции.

б) При $x = 2$ получаем $y = 4 \cdot 2 - |2| + 2 = 8 - 2 + 2 = 8$. Так как значение

функции не равно ординате точки В (2; 6), то точка В не принадлежит графику функции.

(Ответ: А принадлежит, В – не принадлежит.)

4. Решение

При построении графика функции $y = \frac{-3x-1}{x}$ учтем, что $x \neq 0$. Умножим обе части данного равенства на x и получим $-3x-1$. Построим график этой линейной функции, определив, например, точки пересечения графика с осями координат.

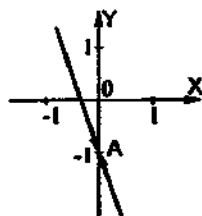


Рис. 1.71

Из графика удалим точку А, абсцисса которой равна нулю (эта точка показана стрелками).

5. Решение

На координатной плоскости построим точку А (–3; –6). Так как функция $y = kx$ – прямая пропорциональная зависимость, то ее график проходит через начало координат. Поэтому через начало координат и точку А проведем прямую – график данной функции.

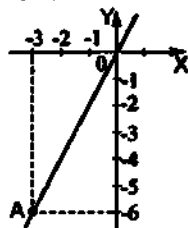


Рис. 1.72

Так как график проходит через точку А, то ее координаты удовлетворяют уравнению функции. Поэтому получаем: $-36 = k(-3)$, откуда $k = 2$.

(Ответ: $k = 2$.)

6. Решение

Пусть первоначально поезд находится в точке В на расстоянии 40 км от города (точка А).

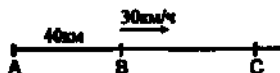


Рис. 1.73

Двигаясь со скоростью 30 км/ч поезд за время t ч проедет расстояние $BC = 40 \cdot t$. Тогда расстояние поезда от города $S = AC = AB + BC = 40 + 30 \cdot t$ км.

(Ответ: $S = 40 + 30 \cdot t$.)

7. Решение

Так как график функции параллелен прямой $y = 2x - 6$, то угловой коэффициент данной функции такой же (то есть $k = 2$). Поэтому функция имеет вид $y = 2x + b$. Найдем величину b . Так как график функции проходит через точку $A(3; 2)$, то ее координаты удовлетворяют уравнению функции: $2 = 2 \cdot 3 + b$ или $2 = 6 + b$, откуда $b = -4$. Итак, искомая функция $y = 2x - 4$.

(Ответ: $y = 2x - 4$.)

8. Решение

Определим точки пересечения графика функции $y = \frac{3x-6}{x^2+2}$ с осями координат. Точка пересечения с осью ординат имеет абсциссу, равную нулю. Поэтому подставим значение $x = 0$ в функцию и получим $y = \frac{3 \cdot 0 - 6}{0^2 + 2} = \frac{-6}{2} = -3$. Итак, координаты точки пересечения с осью ординат $A(0; -3)$. Точка пересечения с осью абсцисс имеет нулевую ординату. Поэтому подставим значение $y = 0$ в функцию и получим уравнение $0 = \frac{3x-6}{x^2+2}$. Дробь равна нулю, если ее числитель равен нулю $0 = 3x - 6$ (а знаменатель при этом в нуль не обращается), откуда $x = 2$. Поэтому координаты точки пересечения с осью абсцисс $B(2; 0)$.

(Ответ: $A(0; -3)$, $B(2; 0)$.)

9. Решение

Пусть $A(x_0, y_0)$ – точка пересечения графиков функций $y = 3x - 14$ и $y = 5x - 6$. Эта точка принадлежит каждому графику и ее координаты удовлетворяют каждой функции, то есть выполняются равенства $y_0 = 3 \cdot x_0 - 14$ и $y_0 = 5 \cdot x_0 - 6$. Так как левые части одинаковы, то равны и правые части. Получаем линейное уравнение: $3 \cdot x_0 - 14 = 5 \cdot x_0 - 6$ или $-8 = 2 \cdot x_0$, откуда абсцисса точки пересечения $x_0 = -4$. Теперь из любого равенства, например из первого, найдем ординату $y_0 = 3 \cdot x_0 - 14 = 3 \cdot (-4) - 14 = -12 - 14 = -26$. Итак, координаты точки пересечения $A(-4; -26)$.

(Ответ: $A(-4; -26)$.)

10. Решение

Построим график данной функции. Сначала строим график функции

$y = x + 1$ и выбираем из него те точки, абсциссы которых $x \leq 1$ (сплошная линия).

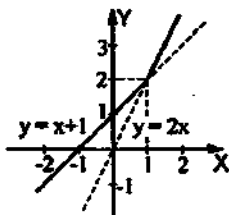


Рис. 1.74

Потом строим график функции $y = 2x$ и выбираем из него те точки, абсциссы которых $x > 1$ (сплошная линия).

11. Решение

Так как модуль любого выражения величина неотрицательная, то уравнение $|4 - 2x| + |y - 1| = 0$ выполняется только в случае $|4 - 2x| = 0$ и $|y - 1| = 0$. Модуль величины равен нулю, если сама величина равна нулю. Поэтому получаем уравнение: $4 - 2x = 0$ (откуда $x = 2$) и $y - 1 = 0$ (тогда $y = 1$). Итак, графиком данного уравнения является единственная точка $A(2; 1)$.

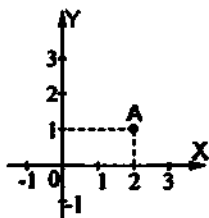


Рис. 1.75

12. Решение

Графики линейных функций $y = kx + b$ параллельны, если выполнены условия: $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$. Для данных функций $y = (3a + 2)x + 2a - 1$ и $y = (a - 1)x + 3 - 4a$ получаем условия: $3a + 2 = a - 2$ и $2a - 1 \neq 3 - 4a$. Решим уравнение $3a + 2 = a - 2$. Получаем $2a = -4$, откуда $a = -2$. Проверим, что выполняется неравенство $2a - 1 \neq 3 - 4a$. Подставим значение $a = -2$ в левую и правую части и получим верное неравенство $2 \cdot (-2) - 1 \neq 3 - 4 \cdot (-2)$ или $-5 \neq 11$. Теперь подставим $a = -2$ в данные функции и определим их: $y = (3 \cdot (-2) + 2)x + 2 \cdot (-2) - 1$ и $y = (-2 - 1)x + 3 - 4 \cdot (-2)$ или $y = -4x - 5$ и $y = -4x + 11$.

(Ответ: $a = -2$, $y = -4x - 5$, $y = -4x + 11$.)

13. Решение

Построим график функции $y = |x| + \frac{x}{|x|}$. Учтем, что $x \neq 0$ и раскроем

знак модуля. Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и функция имеет вид: $y = -x - \frac{x}{x}$ или $y = -x - 1$. Построим график этой функции при $x < 0$. Стрелками показано, что при $x = 0$ функция не определена (не имеет смысла).

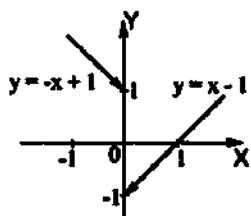


Рис. 1.76

14. Решение

Для построения графика уравнения $|y+x| - x = 3$ раскроем знак модуля, рассмотрим два случая.

а) Если $y+x < 0$, то $|y+x| = -(y+x) = -y-x$ и уравнение имеет вид $-y-x-x=3$, откуда $y = -2x-3$. Подставим эту величину y в неравенство $y+x < 0$ и получим $-2x-3+x < 0$ или $-x-3 < 0$. Это неравенство выполняется при $x > -3$. Построим график функции $y = -2x-3$ при $x > -3$.

б) Если $y+x \geq 0$, то $|y+x| = y+x$ и уравнение имеет вид $y+x-x=3$, откуда $y=3$. Подставим эту величину y в неравенство $y+x \geq 0$ и получим $3+x \geq 0$. Это неравенство выполняется при $x \geq -3$. Построим график функции $y=3$ при $x \geq -3$.

В результате рассмотрения двух случаев получаем график данного уравнения.

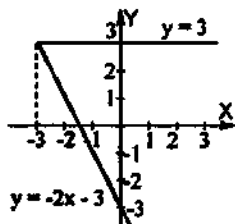


Рис. 1.77

Глава III. Степень с натуральным показателем

§ 6. Степень и ее свойства

Уроки 41–42. Определение степени с натуральным показателем

Цель: развить навыки возведения в степень.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

Степенью числа a с натуральным показателем n называется произведение n одинаковых сомножителей a и обозначается символом a^n ($n \geq 2$), то есть $\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n = a^n$. Если степень равна единице (то

есть $n = 1$), то a^1 равняется числу a (то есть $a^1 = a$). Повторяющийся множитель a называется основанием степени, число повторяющихся множителей, n – показателем степени. Степень a^n с основанием a и показателем n читается « a в степени n » или « n -я степень числа a ». Нахождение значения степени называют возведением в степень.

Пример 1

а) $3^6 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 729$ (3 в шестой степени или шестая степень числа 3);

б) $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$ (0 во второй степени или 0 в квадрате или вторая степень числа 0);

в) $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$ (–2 в четвертой степени или четвертая степень числа (–2));

г) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}$ ($\left(-\frac{1}{3}\right)^3$ в третьей степени или $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$ в кубе или третья степень числа $\left(-\frac{1}{3}\right)$);

д) $(0,6)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. При этом десятичная дробь 0,6 была обращена в обыкновенную дробь $\frac{2}{3}$.

Аналогично можно использовать определение степени числа и в алгебраических выражениях.

Пример 2

$$а) 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b \cdot b) = 2^3 \cdot a^2 \cdot b^4;$$

$$б) \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b} = \frac{a^3}{b^5} \text{ (очевидно, } b \neq 0 \text{);}$$

$$в) a^2 \cdot a^3 \cdot a = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) \cdot a = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^6.$$

В натуральную степень можно возводить любые числа: отрицательные, нуль, положительные. При возведении в степень положительного числа получается положительное число. При возведении в степень нуля получается нуль. При возведении в степень отрицательного числа может получиться и отрицательное и положительное число. При этом если показатель степени – четное число, то при возведении получается положительное число. Если показатель степени – нечетное число, то при возведении получается отрицательное число (пример 1).

Действительно, если n – четное число, то произведение четного числа отрицательных множителей положительно. Если n – нечетное число, то произведение нечетного числа отрицательных множителей отрицательно.

Знак степени a^n .

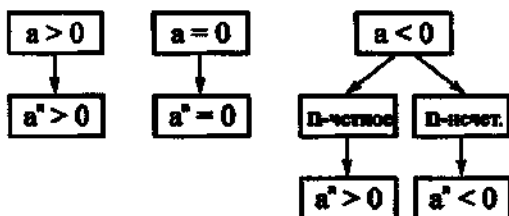


Рис. 1.78

Из приведенной таблицы следует, что при четном показателе n степень числа $a^n > 0$ при любом значении a .

Пример 3

При любых значениях переменных a и b выражения a^2 , a^6 , $(a-b)^2$, $(2a+3b)^4$ и так далее принимают только неотрицательные значения.

Понятие степени числа с натуральным показателем позволяет решать более сложные задачи.

Пример 4

Найдем значения выражений:

$$а) 2 \cdot 3^3 - 2^6 + 4^2 = 2 \cdot 27 - 64 + 16 = 54 - 64 + 16 - 6 \text{ (здесь учтено, что}$$

$$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27; 2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64 \text{ и } 4^2 = 4 \cdot 4 = 16);$$

$$б) \frac{3 \cdot 5^3 - 5 \cdot 2^6}{4 \cdot 3^2 + 2^4 + 3} = \frac{3 \cdot 125 - 5 \cdot 64}{4 \cdot 9 + 16 + 3} = \frac{375 - 320}{36 + 16 + 3} = \frac{55}{55} = 1 \text{ (здесь учтено, что}$$

$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125; 2^6 = 64 \text{ и } 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16).$$

III. Задание на уроке

Выполнить упражнения: № 385 (а, г, е, з); 386 (б, г); 387 (а, г, е, ж, и); 389; 392 (б); 394 (а, б); 395 (а, в); 396 (а, в, г); 398 (б, в, е); 399 (а, д, з); 401 (а); 402 (а); 403; 406; 408 (а, б, г).

IV. Контрольные вопросы

- Понятие степени с натуральным показателем.
- Определение основания степени.
- Определение показателя степени.
- Какое число получается при возведении положительного числа в степень?
- Какое число получается при возведении нуля в степень?
- Какое число получается при возведении отрицательного числа в степень? От чего зависит результат?

V. Задание на дом

Выполнить упражнения: № 385 (б, в, д); 386 (а, д); 387 (б, в, д, к); 390; 392 (а); 394 (в, г); 395 (б, е); 396 (б); 398 (а, д); 399 (б, в, е); 401 (б); 402 (б); 404; 407; 408 (в, д).

VI. Подведение итогов урока

Уроки 43–44. Умножение и деление степеней

Цель: рассмотреть свойства умножения и деления степеней с одинаковыми основаниями.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

- 1) Понятие степени с натуральным показателем.
- 2) Какое число получается при возведении положительного числа в степень?

3) Выполните возведение в степень:

а) 17^2 ; б) $(-4)^3$; в) $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$.

4) Выполните действия:

а) $(12-3)^2$; б) $12^2 - 3^2$.

5) Запишите в виде выражения куб суммы чисел a и b .

Вариант 2

1) Понятие степени с натуральным показателем.

2) Какое число получается при возведении отрицательного числа в степень?

3) Выполните возведение в степень:

а) 19^2 ; б) $(-3)^3$; в) $\left(-\frac{4}{5}\right)^3$.

4) Выполните действия:

а) $(14-5)^2$; б) $14^2 - 5^2$.

5) Запишите в виде выражения сумму кубов чисел a и b .

III. Изучение нового материала

При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание остается прежним, а показатели степеней складываются, то есть $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Используем определение степени с натуральным показателем и свойства умножения и получим: $a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_m \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m+n} = a^{m+n}$.

Доказанное свойство выполняется для любого числа множителей.

Пример 1

а) $2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$;

б) $3^3 \cdot 3^2 \cdot 3 = 3^{3+2+1} = 3^6 = 729$;

в) $x^4 \cdot x^2 \cdot x^5 = x^{4+2+5} = x^{11}$.

При делении степеней с одинаковыми основаниями основание остается прежним, а показатели степеней $a^m : a^n = a^{m-n}$. Очевидно, что $a \neq 0$ (так как делить на ноль нельзя) и $m > n$ (степень $m-n$ должна также быть натуральным числом).

Очевидно, что равенство $a^m : a^n = a^{m-n}$ будет доказано, если будет доказано, что произведение a^{m-n} и a^n равно a^m . Используя свойство умножения степеней, получаем $a^{m-n} \cdot a^n = a^{(m-n)+n} = a^{m-n+n} = a^m$. Тогда по определению частного имеем $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Пример 2

- а) $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2 = 4$; б) $3^8 : 3^5 = 3^{8-5} = 3^3 = 27$;
 в) $a^7 : a^4 = a^{7-4} = a^3 \ (a \neq 0)$; г) $y^9 : y^4 = y^{9-4} = y^5 \ (y \neq 0)$.

Свойство деления $a^m : a^n = a^{m-n}$ было доказано для случая $m > n$. Будем считать, что такое же свойство справедливо и при $m = n$. Тогда свойство имеет вид $a^m : a^m = a^{m-m} = a^0$. Очевидно, что при $a \neq 0$ и любом натуральном m величина $a^m : a^m = 1$. Поэтому разумно считать, что $a^0 = 1$ при $a \neq 0$. Итак, степень числа a , не равного нулю, с нулевым показателем равна единице, то есть $a^0 = 1$ при $a \neq 0$. Заметим, что если основание равно нулю, то степень с нулевым показателем не определена (не имеет смысла), то есть 0^0 не имеет смысла.

Пример 3

- а) $2 \cdot 7^0 = 1$; б) $\left(-6\frac{1}{3}\right)^0 = 1$;
 в) 0^0 не имеет смысла; г) $(3x)^0 = 1$ при $x \neq 0$;
 д) $(x-y)^0 = 1$ при $x \neq y$; е) $(2x+3y)^0 = 1$ при $2x+3y \neq 0$.

После введения нулевой степени формулу $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ можно применять и в случае, когда $m=0$ и $n=0$, если $a \neq 0$. Формулу $a^m : a^n = a^{m-n}$ можно применять, когда m и n не только натуральные числа, но и нули, если $m \geq n$ и $a \neq 0$. В старших классах будет показано, что свойства умножения и деления степеней выполняются при любых показателях степеней. Очевидно, что свойства умножения и деления можно применять и совместно.

Пример 4

- а) $2^3 \cdot 2^6 : 2^5 = 2^{3+6-5} = 2^4 = 16$;
 б) $2^5 : (2 \cdot 2^2) = 2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2 = 4$;
 в) $x^4 \cdot x^3 : x^5 = x^{4+3-5} = x^2$;
 г) $\frac{y^5 \cdot y^3 \cdot y}{y^4 \cdot y^2} = y^{5+3+1-4-2} = y^3$.

IV. Задание на уроке

№ 413 (г, з); 415 (а, в); 417; 418 (а, д); 420 (а, д); 422 (а); 423 (а); 424 (б, ж); 426 (б, е); 428 (а, г); 429 (а, г); 430 (в).

V. Контрольные вопросы

- Напишите свойства умножения и деления степеней.
- Сформулируйте словами свойства умножения и деления степеней.

– Чему равна степень с нулевым показателем? Для каких оснований степени?

VI. Задание на дом

№ 413 (а, ж); 415 (б, г); 416 (б); 418 (б, в, е); 420 (б, д); 422 (г); 423 (б); 424 (а, в, е); 426 (а, д); 428 (б, в); 429 (б, д); 430 (г).

VII. Творческие задания

1. Определите закономерности и найдите последнюю цифру числа a^n для $a = 1, 2, 3, \dots, 10$ и натурального n .

(Ответ: результаты приведены в таблице. Сверху указано основание a , слева – степень $n = 1, 2, \dots, 8$. В последней строке указана повторяемость последней цифры. Видно, что при возведении $a = 1; 5; 6; 10$ в любую степень последняя цифра не меняется. При возведении $a = 2; 3; 7; 8$ последняя цифра повторяется при изменении показателя степени на 4. При возведении $a = 4; 9$ последняя цифра повторяется при изменении показателя степени на 2.)

a/a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0
3	1	8	7	4	5	6	3	2	9	0
4	1	6	1	6	5	6	1	6	1	0
5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
6	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0
7	1	8	7	4	5	6	3	2	9	0
8	1	6	1	6	5	6	1	6	1	0
		4	4	2			4	4	2	

2. Используя результаты предыдущей задачи (см. таблицу), найдите последнюю цифру числа:

а) 2004^{2004} ;

б) 1936^{537} ;

в) 5867^{1993} ;

г) 2435^{183} ;

д) 3648^{1734} .

(Ответ:

а) 6 (последняя цифра основания 4, показатель степени 2004 кратен 4);

б) 6 (последняя цифра основания 6, число 6 в любой степени оканчивается на 6);

в) 7 (последняя цифра основания 7, показатель 1993 при делении на 4 дает остаток 1, то есть $1993 = 4 \cdot 498 + 1$);

г) 5 (последняя цифра основания 5, число 5 в любой степени оканчивается на 5);

д) 4 (последняя цифра основания 8, показатель степени 1734 при делении на 4 дает остаток 2, то есть $1734 = 4 \cdot 433 + 2$).

4. Найдите последнюю цифру числа:

а) $1536^{937} - 355^{386} + 121^{536}$;

- б) $310^{636} + 3 \cdot 531^{196} + 786^{374}$,
 в) $734^{1531} + 2 \cdot 631^{324} + 389^{678}$,
 г) $1743^{651} - 3 \cdot 135^{163} + 4 \cdot 647^{174}$.

(Ответ:

а) $2 (1536^{937})$ оканчивается на 6, 355^{386} – на 5, 121^{536} – на 1 и данное число оканчивается на $6 - 5 + 1 = 2$);

б) $9 (310^{636})$ оканчивается на 0, 531^{196} – на 1, $3 \cdot 531^{196}$ – на 3, 786^{374} – на 6 и данное число оканчивается на $0 + 3 + 6 = 9$);

в) $7 (734^{1531})$ оканчивается на 4, 631^{324} – на 1, $2 \cdot 631^{324}$ – на 2, 389^{678} – на 1 и данное число оканчивается на $4 + 2 + 1 = 7$);

г) $8 (1743^{651})$ оканчивается на 7, 135^{163} – на 5, $3 \cdot 135^{163}$ – на 5, 647^{174} – на 9, $4 \cdot 647^{174}$ – на 6 и данное число оканчивается на $7 - 5 + 6 = 8$).

4. Определите, является ли число простым или составным:

- а) $537^{1994} - 3$; б) $735^{1937} - 1$; в) $736^{354} - 1$;
 г) $846^{175} - 6$; д) $537^{1981} - 389^{196}$; е) $746^{432} - 371$.

(Ответ: все числа составные.)

VIII. Подведение итогов урока

Уроки 45–46. Возведение в степень произведения и степени

Цель: рассмотреть свойства возведения в степень произведения чисел и степени числа.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1) Сформулируйте словами и напишите свойства умножения степеней с одинаковыми основаниями.

2) Выполните действия со степенями:

- а) $3^5 \cdot 3^{13} : 3^{16}$; б) $3^5 \cdot 3^{13} : 3^{16}$; в) $\frac{a^6 \cdot a^9}{a^{10} \cdot a^4}$.

Вариант 2

1) Сформулируйте словами и напишите свойства умножения степеней с одинаковыми основаниями.

2) Выполните действия со степенями:

- а) $4^5 \cdot 4^{12} : 4^{13}$; б) $a^7 \cdot a^5 : a^9$; в) $\frac{a^8 \cdot a^9}{a^6 \cdot a^7}$.

III. Изучение нового материала

При возведении в степень произведения чисел каждое число возводится в эту степень и результаты перемножаются, то есть $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ (a и b – любые числа, n – натуральное число).

По определению степени запишем: $(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b)(a \cdot b) \dots (a \cdot b)}_n$.

Сгруппировав отдельно множители a и b , получаем:

$$\underbrace{(a \cdot b)(a \cdot b) \dots (a \cdot b)}_n = \underbrace{(a \cdot a \cdot a)}_n \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot b)}_n.$$

Используя определение степени, запишем: $\underbrace{(a \cdot a \cdot a)}_n \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot b)}_n = a^n \cdot b^n$.

Следовательно, доказано свойство $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$. Разумеется, это свойство можно использовать при умножении любого числа множителей.

Пример 1

$$\text{а) } 6^3 = (2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3; \quad \text{б) } 60^2 = (3 \cdot 4 \cdot 5)^2 = 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2;$$

$$\text{в) } (a \cdot b)^4 = a^4 \cdot b^4; \quad \text{г) } (2 \cdot x \cdot y \cdot z)^3 = 2^3 \cdot x^3 \cdot y^3 \cdot z^3 = 8 \cdot x^3 \cdot y^3 \cdot z^3.$$

При возведении степени числа в степень основание остается тем же, а показатели степени перемножаются, то есть $(a^m)^n = a^{mn}$ (a – любое число, m и n – натуральные числа). По определению степени запишем: $(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \dots a^m}_n$. По свойству степени это выражение равно:

$$\text{но: } \underbrace{a^m \cdot a^m \dots a^m}_n = a^{m+m+\dots+m} = a^{m \cdot n}.$$

Итак, доказано свойство $(a^m)^n = a^{mn}$.

Пример 2

$$\text{а) } (2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6; \quad \text{б) } (x^3)^4 = x^{3 \cdot 4} = x^{12}.$$

Разумеется, рассмотренные свойства степеней можно использовать вместе с другими свойствами.

Пример 3

$$\text{а) } (2^3 \cdot 3^4)^5 = (2^3)^5 \cdot (3^4)^5 = 2^{4 \cdot 5} \cdot 3^{4 \cdot 5} = 2^{20} \cdot 3^{20};$$

$$\text{б) } (a^2 \cdot b^3)^4 = (a^2)^4 \cdot (b^3)^4 = a^{2 \cdot 4} \cdot b^{3 \cdot 4} = a^8 \cdot b^{12};$$

$$в) \left(\frac{a \cdot b^3}{c^2} \right)^2 = \frac{(a^1)^2 \cdot (b^3)^2}{(c^2)^2} = \frac{a^{1 \cdot 2} \cdot b^{3 \cdot 2}}{c^{2 \cdot 2}} = \frac{a^2 \cdot b^6}{c^4};$$

$$г) \frac{(a^2 \cdot b^3)^4}{(a \cdot b^2)^3} = \frac{(a^2)^4 \cdot (b^3)^4}{(a^1)^3 \cdot (b^2)^3} = \frac{a^{2 \cdot 4} \cdot b^{3 \cdot 4}}{a^{1 \cdot 3} \cdot b^{2 \cdot 3}} = \frac{a^8 \cdot b^{12}}{a^3 \cdot b^6} = a^{8-3} \cdot b^{12-6} = a^5 \cdot b^6.$$

IV. Задание на уроке

№ 438 (а, д, ж); 440 (а, б); 441; 442; 444 (а, г); 446 (а, е); 448 (а, б); 450 (а); 452 (б); 454; 455 (а, д); 456 (а, б, в); 458 (а, б).

V. Контрольные вопросы

- Напишите свойства возведения в степень произведения и степени.
- Сформулируйте словами свойства возведения в степень произведения и степени.

VI. Задание на дом

№ 438 (б, в, з); 440 (в, г); 443; 444 (б, в, е); 446 (в, ж); 448 (в, г); 450 (б); 452 (в); 453; 455 (б, в); 456 (г, д); 458 (в, г).

VII. Творческие задания

1. Какое из данных чисел больше:

а) $(32^{44})^{25}$ и $(324^{10})^{10}$;	б) $(15^6)^8$ и $(15^{10})^4$;
в) $(613^7)^4$ и $(613^5)^6$;	г) 512^4 и $(-512)^4$;
д) $(-316)^7$ и $(-316)^8$;	е) $(-316^2)^3$ и $(-316)^6$.

2. Сравните данные числа:

а) $(2^3)^4$ и $(3^2)^6$;	б) $(3^3)^{15}$ и $(2^5)^9$;
в) $(3^3)^6$ и $(2^5)^6$;	г) $(2^4)^{17}$ и $(4^2)^{17}$;
д) $(3^4)^{183}$ и $(4^3)^{183}$.	

3. Определите последнюю цифру числа:

а) $(193^3)^7$;	б) $(397^6)^5$;
в) $(124^5)^4$;	г) $(512^5)^7$.

4. Упростите выражение:

- | |
|---|
| а) $2 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{16}$; |
| б) $2^{14} + 2^{14} + 2^{15} + 2^{16} + \dots + 2^{34}$. |

(Ответ:

а) 2^{17} (заметьте: $2 + 2 = 2^2$, $2^2 + 2^2 = 2^3$ и так далее до последнего слагаемого);
 б) 2^{35} (заметьте: $2^{14} + 2^{14} = 2 \cdot 2^{14} = 2^{15}$, $2^{15} + 2^{15} = 2^{16}$ и так далее до последнего слагаемого).)

5. Вычислите:

а) $(-1)^1 \cdot (-1)^2 \cdot \dots \cdot (-1)^{50}$;	б) $(-1)^1 + (-1)^2 + \dots + (-1)^{50}$.

(Ответ:

- а) -1 ;

б) 0 (заметьте: 25 степеней с нечетными показателями степени и 25 степеней с четными показателями степени).)

6. Решите уравнение:

а) $2^x = 64$;

б) $3^{x-5} = 81$;

в) $2^3 \cdot 2^{x-7} = 16$;

г) $3^{2x-1} \cdot 3^{x+1} = 27$;

д) $(3^{x-1})^2 = 81$;

е) $(2^3)^{x-1} = 512$.

(Ответ: а) $x = 6$; б) $x = 9$; в) $x = 8$; г) $x = 1$; д) $x = 3$.)

VIII. Подведение итогов урока

§ 7. Одночлены

Урок 47. Одночлен и его стандартный вид

Цели: ознакомить с понятием одночлена, его стандартным видом, определить степень одночлена, вычислить значение одночлена.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Выполните действия со степенями:

1) $(3a^2b)^3$;

2) $(aa^3b^2b)^5$;

3) $(x^{m+2} \cdot x^{3m-2})^2$;

4) $\frac{(a^3)^2 \cdot (a^4)^3 \cdot a^2}{(a^2)^4 \cdot a^5 \cdot a^4}$.

Вариант 2

Выполните действия со степенями:

1) $(4a^3b^2)^2$;

2) $(a^2a^3b^3b)^4$;

3) $(x^{2m-3} \cdot x^{m+3})^3$;

4) $\frac{(a^2)^3 \cdot (a^3)^2 \cdot a^4}{(a^2)^4 \cdot a^3 \cdot a^2}$.

III. Изучение нового материала

Алгебраическое выражение, состоящее из произведения числовых и буквенных множителей или их степеней, называется одночленом.

Пример 1

а) Выражение $-3a^2b^3c^5$ и $-7ab(-0,5a^2c^3)ab^5$ являются одночленами, так как состоят только из произведений числовых и буквенных множителей и их степеней.

б) Выражение $\frac{a}{3} \cdot b^2 c^4$ также является одночленом, так как может быть записано в виде $\frac{1}{3} \cdot ab^2 c^4$ и тоже состоит только из произведения числового множителя $\frac{1}{3}$ и буквенных множителей в соответствующих степенях: a, b^2, c^4 .

в) Выражение $a^3 - b^2$ не является одночленом, так как содержит операцию вычитания выражений a^3 и b^2 .

г) Выражение $a^3 : b - ab^2$ также не является одночленом, так как содержит операцию деления выражений a^3 и b , и операцию вычитаний выражений $a^3 : b$ и $a \cdot b^2$.

Заметим, что числа, переменные и их степени считаются одночленами.

Пример 2

Выражения $7, 3; (-5, 1)^2; x; y^4$ — одночлены.

Стандартным видом одночлена называется такая его форма, при которой первым сомножителем является числовой множитель, а буквенные множители расположены в алфавитном порядке и имеют соответствующие показатели степени. При этом числовой множитель называется коэффициентом одночлена.

Пример 3

- а) коэффициент одночлена $3a^2b^3$ равен 3;
- б) коэффициент одночлена $-6,8xy^2z^4$ равен $-6,8$;
- в) коэффициент одночлена a^3b^2 равен 1;
- г) коэффициент одночлена $-a^2bc$ равен -1 .

Пример 4

Стандартный вид одночлена $A = 3 \cdot a^2 b \cdot (4 \cdot a^3 b^2 c) \cdot (-0,125 \cdot abc^3)$ есть одночлен $1,5 \cdot a^6 (b \cdot b^2 \cdot b)(c \cdot c^3) = 1,5 \cdot a^6 b^4 c^4$, так как выполнив умножение в данном одночлене, получим: $A = (-3 \cdot 4 \cdot (-0,125)) \cdot (a^2 \cdot a^3 \cdot a) \cdot (b \cdot b^2 \cdot b) \cdot (c \cdot c^3) = 1,5 \cdot a^6 \cdot b^4 \cdot c^4$.

При этом множитель $1,5$ называют коэффициентом одночлена. Заметим, что любая другая форма одночлена не является его стандартным видом:

а) $A = 1,5 \cdot b^4 \cdot a^6 \cdot c^4$, так как множители a, b, c расположены не в алфавитном порядке.

б) $A = a^4 \cdot b^4 \cdot c^4 \cdot 1,5$, так как числовой множитель 1,5 находится не на первом месте.

в) $A = 1,5 \cdot a^4 \cdot b^4 \cdot c^4$, так как не перемножены выражения a^2 и a^4 .

Можно провести некоторую аналогию между стандартным видом одночлена и разложением числа на простые множители: в обоих случаях **каждый множитель должен располагаться строго на своем месте.**

Степенью одночлена называется сумма показателей степеней всех входящих в него переменных. Если одночлен не содержит переменных (то есть является числом), то его степень считают равной нулю.

Пример 5

а) Степень одночленов $3,1$; $-\frac{8}{3}$; 4 равна нулю;

б) степень одночленов $3ab^2c^3$; $-2x^6$; $\frac{6}{7}(x \cdot y \cdot z)^2 = \frac{6}{7} \cdot x^2 y^2 z^2$ равна 6;

в) степень одночленов $2,4a^8$; $-3,7a^5b^3$; $-6,4a^2b^3cd^2$ равна 8.

IV. Задание на уроке

Выполнить упражнения: № 463 (б, в, г, з); 464 (в, г, д); 465 (а, б, г); 466 (а, б, в); 467 (а, г); 469 (а); 471; 473 (б, г, е).

V. Контрольные вопросы

- Какое выражение называется одночленом? Приведите примеры.
- Какая форма одночлена называется стандартным видом одночлена? Приведите примеры.
- Что называется коэффициентом одночлена? Как определить степень одночлена?

VI. Задание на дом

Выполнить упражнения: № 463 (а, д, е, ж); 464 (а, б); 465 (в, д, е); 466 (г, д, е); 467 (б, в); 469 (б); 470; 472; 473 (а, в, д).

VII. Подведение итогов урока

Уроки 48–49. Умножение одночленов.

Возведение одночлена в степень

Цель: развить навыки умножения и возведения одночленов в степень.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1) Какое выражение называется одночленом? Как определить степень одночлена?

2) Приведите одночлен к стандартному виду: $9a^3b(-2,5a^2b^4)b^2$.

3) Определите степень одночлена $-6a^3b^2$ и найдите его значение при $a=2$ и $b=3$.

Вариант 2

1) Какая форма одночлена называется стандартным видом одночлена? Что называется коэффициентом одночлена?

2) Приведите одночлен к стандартному виду: $7a^3b^2(-1,5a^3b^3)a^3$.

3) Определите степень одночлена $-8a^2b^3$ и найдите его значение при $a=3$ и $b=2$.

III. Изучение нового материала

При умножении одночленов и возведении одночлена в степень используются свойства степеней. При этом получается одночлен, который обычно записывают в стандартном виде.

Пример 1

Умножим одночлены $A=2,3ab^2c$ и $B=-0,2a^3bc^4$.

Найдем произведение одночленов A и B . Перемножим числовые множители и степени с одинаковыми основаниями. Получаем:
 $A \cdot B = 2,3ab^2c \cdot (-0,2a^3bc^4) = 2,3(-0,2) \cdot (a \cdot a^3) \cdot (b^2 \cdot b) \cdot (c \cdot c^4) = -0,46a^4b^3c^5$.

Пример 2

Умножим одночлены $A=0,3a^2b$, $B=2abc^2$ и $C=3ab^2c^4$.

Найдем произведение одночленов A , B и C . Используя свойства степеней, получаем: $A \cdot B \cdot C = (0,3a^2b) \cdot (2abc^2) \cdot (3ab^2c^4) =$
 $= (0,3 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (a^2 \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b^2) \cdot (c^2 \cdot c^4) = 1,8a^4b^3c^6$.

Пример 3

Возведем в пятую степень одночлен $A=2ab^2c^3$. Получаем:

$$A^5 = (2ab^2c^3)^5 = 2^5 \cdot a^5 (b^2)^5 \cdot (c^3)^5 = 32a^5b^{10}c^{15}.$$

Запись одночлена в стандартном виде, как правило, позволяет проще вычислить его значение, если известны значения букв, входящих в него. При этом используется умножение одночленов и возведение одночленов в степень.

Пример 4

Вычислить значение одночлена $A = 2a^2bc \cdot (bc)^2 \cdot a$, если $a = 3$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 2$. Если сразу подставлять значения переменных a, b, c в одночлен A , то получим достаточно громоздкое выражение $A = 2 \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right)^2 \cdot 3$.

Поэтому сначала запишем одночлен A в стандартном виде:

$A = 2 \cdot (a^2 \cdot a) \cdot (b \cdot b^2) \cdot (c \cdot c^2) = 2a^3b^3c^3 = 2(abc)^3$. Теперь можно подставить значения a, b, c : $A = 2 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\right)^3 = 2 \cdot 3^3 = 2 \cdot 27 = 54$.

В ряде случаев не приведя одночлена к стандартному виду, найти его значение невозможно, так как известны лишь определенные комбинации переменных, но не сами переменные.

Пример 5

Вычислить значение одночлена $A = 0,5a^2b^3c^2(ac)^2$, если $a \cdot b \cdot c = 1$, $a \cdot c^2 = 2$. В отличие от предыдущего примера здесь даже непонятно, что можно подставить. Поэтому приведем одночлен к стандартному виду: $A = 0,5 \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot c^2 \cdot a^2 \cdot c^2 \cdot c = 0,5(a^2 \cdot a^2) \cdot b^3 \cdot (c^2 \cdot c^2 \cdot c) = 0,5 \cdot a^4 \cdot b^3 \cdot c^5$.

Теперь в этом многочлене выделим те комбинации переменных, которые известны: $A = 0,5 \cdot a^4 \cdot b^3 \cdot c^5 = 0,5 \cdot a^3 \cdot b^3 \cdot c^3 (a \cdot c^2) = 0,5(a \cdot b \cdot c)^3 \cdot (a \cdot c^2)$. После этого можно подставить значения $a \cdot b \cdot c = 1$ и $a \cdot c^2 = 2$: $A = 0,5 \cdot 1^3 \cdot 2 = 1$.

Одночлены называются подобными, если они отличаются коэффициентом или ничем не отличаются друг от друга.

Пример 6

а) Одночлены $-0,3ab^2c^3$ и $2ab^2c^3$ подобные, так как отличаются только коэффициентами ($-0,3$) и 2 .

б) Одночлены $-0,3ab^2c^3$ и $-0,3ab^2c^3$ подобные, так как они не отличаются друг от друга.

в) Одночлены $2ab^2c^3$ и $3a^2b^2c^3$ не являются подобными, так как отличаются степенями переменной a : a и a^2 .

IV. Задание на уроке

№ 477 (а, в, д); 478 (б, в); 480 (а, б, г); 481; 483 (а, г, е); 484 (а, в, д); 485 (б); 486 (а, б); 488; 491 (а, б, в, г); 492 (а, б); 493 (а, в, д).

V. Контрольные вопросы

– Как умножить одночлены?

- Как возвести одночлен в натуральную степень?
- Какие одночлены называются подобными?

VI. Задание на дом

№ 477 (б, г); 478 (а, г); 480 (в, д, е); 482; 483 (б, в, д); 484 (б, г, е); 485 (а); 486 (в, г); 487 (в, г); 491 (д, е); 492 (в, д); 493 (б, г, е).

VII. Подведение итогов урока

Уроки 50–51. Функции $y = x^2$ и $y = x^3$ и их графики

Цель: рассмотреть свойства функции $y = x^2$ и $y = x^3$ и их графики.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

- 1) Умножьте одночлены $3x^2y$; $-0,5x^3y^2$ и $2xy^4$.
- 2) Одночлен $2a^3b^2c$ возведите в квадрат и в куб.
- 3) Представьте выражение $(-3a^3b)^2 \cdot 2a^2b^3 \cdot (-0,5ab^2)$ в виде одночлена стандартного вида и определите его степень.

Вариант 2

- 1) Умножьте одночлены $2xy^2$; $3x^4y^3$ и $-0,5x^2y^3$.
- 2) Одночлен $3ab^3c^2$ возведите в квадрат и в куб.
- 3) Представьте выражение $(-2a^3b^2)^3 \cdot 3a^3b^4 \cdot (-0,5a^2b)$ в виде одночлена стандартного вида и определите его степень.

III. Изучение нового материала

Зависимость площади квадрата S от его стороны a ($S = a^2$), зависимость кинетической энергии E тела массой m от его скорости

v ($E = \frac{m \cdot v^2}{2}$), зависимость потенциальной энергии E пружины, растя-

нутой на длину x ($E = \frac{k \cdot x^2}{2}$), где k – коэффициент упругости пружины,

и так далее описываются квадратной функцией $y = x^2$. Рассмотрим

таблицу значений такой функции и на основании ее построим график функции.

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

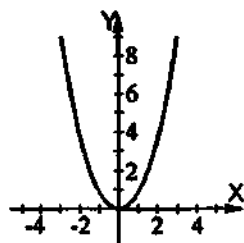


Рис. 1.79

График функции $y = x^2$ называется **параболой**. Обсудим свойства такой функции:

1. Область определения функции – все значения x . Действительно, любое число x можно возвести во вторую степень (в квадрат).

2. Область значений функции – все значения $y \geq 0$. При возведении в квадрат любого числа $x \neq 0$ получаем положительное число. При возведении в квадрат нуля получаем нуль. Поэтому значения $y \geq 0$ и график функции расположен не ниже оси абсцисс.

3. График функции проходит через начало координат.

4. Противоположным значениям x соответствует одно и то же значение y , так как $(-x)^2 = x^2$ при любом x . Поэтому график функции симметричен относительно оси ординат. Заметим, что такие функции называются **четными**.

Рассмотрим кубическую зависимость $y = x^3$. Зависимость объема V куба от его стороны a ($V = a^3$), зависимость объема V шара от его радиуса R ($V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$), где $\pi \approx 3,14 \dots$) и так далее являются именно такими

зависимостями. Составим таблицу значений функции $y = x^3$ и на основании ее построим график.

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
y	-8	-3,38	-1	-0,13	0	0,13	1	3,38	8

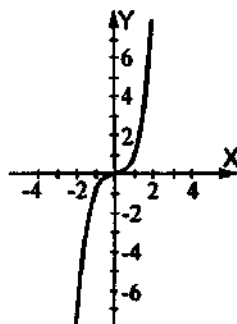


Рис. 1.80

Обсудим свойства такой функции:

1. Область определения функции – все значения x . Действительно, любое число x можно возвести в третью степень (в куб).

2. Область значений функции – все значения y . При возведении в куб отрицательного числа получаем отрицательное число, при возведении нуля – нуль, при возведении положительного числа – положительное число.

3. График функции проходит через начало координат.

4. Противоположным значениям x соответствуют противоположные значения y , так как $(-x)^3 = (-1)^3 \cdot x^3 = -x^3$ при любом x . Поэтому график функции симметричен относительно начала координат.

Заметим, что такие функции называются нечетными.

IV. Задание на уроке

Выполнить упражнения: № 501, 503, 506, 507, 509, 510 (б), 511 (а).

V. Контрольные вопросы

- Нарисуйте эскиз графика функции $y = x^3$.
- Перечислите свойства функции $y = x^2$.
- Нарисуйте эскиз графика функции $y = x^3$.
- Перечислите свойства функции $y = x^3$.
- Дайте определение четной и нечетной функции.

VI. Задание на дом

Выполнить упражнения: № 500, 502, 504, 505, 508, 510 (а), 511 (б).

VII. Творческие задания

1. Пользуясь графиком соответствующих функций, сравните числа:

а) $1,1^2$ и $2,3^2$;	б) $(-2,1)^2$ и $2,1^2$;	в) $(-3,2)^2$ и $1,4^2$;
г) $(-2,1)^3$ и $(-1,2)^3$;	д) $(-1,8)^3$ и $1,8^3$;	е) $1,3^3$ и $1,7^3$.

2. Среди приведенных функций укажите четные и нечетные функции:

а) $y = -x^2$;	б) $y = x^2$;	в) $y = x $;

г) $y = x \cdot |x|$;

д) $y = x^2 \cdot |x|$;

е) $y = x^4$;

ж) $y = x^5$;

з) $y = x$;

и) $y = 2x + 1$;

к) $y = -3x + 4$;

л) $y = -7x$.

(Ответ: четные функции – а), в), д), е); нечетные функции – б), г), ж), з), л.)

3. Постройте графики функций:

а) $y = -x^2$;

б) $y = -x^3$;

в) $y = x^2 - 1$;

г) $y = x^2 + 2$;

д) $y = (x-1)^2$;

е) $y = (x+1)^2$;

ж) $y = x \cdot |x|$;

з) $y = |x|$;

и) $y = \frac{x^2}{|x|}$;

к) $y = \frac{x^3}{|x|}$;

л) $y = x^2 + \frac{|x|}{x}$;

м) $y = x^3 - \frac{|x|}{x}$.

Среди построенных функций укажите четные и нечетные функции.

VIII. Подведение итогов урока

§ 8. Абсолютная и относительная погрешности

Урок 52. Абсолютная погрешность

Цель: ознакомиться с понятием абсолютной погрешности и с ее вычислением.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

- 1) Перечислите основные свойства функции $y = x^2$.
- 2) Постройте графики функций:

а) $y = (x-1)^3$;

б) $y = x^2 + 1$.

Вариант 2

- 1) Перечислите основные свойства функции $y = x^3$.

2) Постройте графики функций:

а) $y = (x+1)^3$;

б) $y = x^3 - 1$.

III. Изучение нового материала

Пример 1

По графику функции $y = x^2$ найдем при $x = 2,5$ приблизительное значение функции $y \approx 6,2$. В то же время по формуле $y = x^2$ можно найти и точное значение функции $y_0 = 2,5^2 = 6,25$. Разность точного y_0 и приближенного значений равна $\Delta y = y_0 - y = 6,25 - 6,2 = 0,05$. Однако может оказаться, что точное значение будет меньше приближенного. Тогда разность точного и приближенного значений будет отрицательной. Поэтому удобно рассматривать не саму разность, а ее модуль. Этот модуль разности называют **абсолютной погрешностью**. В данном случае абсолютная погрешность приближенного значения 6,2 равна 0,05.

Абсолютной погрешностью Δy приближенного значения называется модуль разности точного y_0 и приближенного y значений, то есть $\Delta y = |y_0 - y|$.

На практике точно измерить любую величину: вес, длину, скорость и так далее невозможно. Поэтому найти абсолютную погрешность приближенного значения нельзя, так как неизвестно точное значение величины.

Пример 2

При измерении длины бруса с помощью рулетки (с сантиметровыми делениями) получим приближенное значение $y \approx 218$ см. Точное значение y_0 длины неизвестно. Поэтому абсолютную погрешность приближенного значения найти нельзя. В таких случаях важно указать такое число, больше которого абсолютная погрешность быть не может. Так как цена деления рулетки 1 см, то абсолютная погрешность приближенного значения $y \approx 218$ не больше 1, то есть $|y_0 - 218| \leq 1$ или $\Delta y \leq 1$. В таких случаях говорят, что число 218 есть приближенное значение длины бруса (в сантиметрах) с точностью до 1.

Если $y = y_0$ и абсолютная погрешность этого приближенного значения не превосходит числа h , то число y называют **приближенным значением числа y_0 с точностью h** . Пишут $y = y_0$ с точностью до h .

Точность приближенного значения зависит от многих причин. В частности, если приближенное значение найдено в процессе измерения, то его точность зависит от измерительного прибора.

Например, цена деления школьной линейки 0,1 см. Поэтому с ее помощью можно измерять длины с точностью до 0,1 см. Цена деления рулетки 1 см и с ее помощью можно мерить длины с точностью до 1 см.

При округлении десятичных дробей до десятых, сотых, тысячных и так далее находим их приближенные значения с точностью до 0,1; 0,01; 0,001 и так далее.

Пример 3

Число 3,723 округлим:

а) до сотых и получим 3,72. Число 3,72 является приближенным значением числа 3,723 с точностью до 0,01. Абсолютная погрешность этого приближенного значения $|3,723 - 3,72| = |0,003| = 0,003 < 0,01$;

б) до десятых и получим 3,7. Число 3,7 является приближенным значением числа 3,723 с точностью до 0,1. Абсолютная погрешность этого приближенного значения $|3,723 - 3,7| = |0,023| = 0,023 < 0,1$ и так далее.

IV. Задание на уроке

№ 520; 521; 524; 526; 528.

V. Контрольные вопросы

- Что называется абсолютной погрешностью приближенного значения?
- Что называется приближенным значением числа?
- Точность при округлении десятичных дробей?

VI. Задание на дом

№ 519; 522 (а, в); 523; 525; 527; 529.

VII. Подведение итогов урока

Урок 53. Относительная погрешность

Цель: ознакомиться с понятием относительной погрешности и ее вычислением

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Основные понятия

Пример 1

При измерении с помощью линейки (с ценой деления 1 см) длины ластика l_1 , длины пенала l_2 и длины комнаты l_3 нашли $l_1 \approx 3$, $l_2 \approx 18$ и $l_3 \approx 513$ (в сантиметрах). Абсолютная погрешность каждого измерения

не более 1 см. Однако 1 составляет существенную часть числа l_1 , поэтому измерение длины ластика можно признать очень неточным. Та же величина 1 составляет не очень существенную часть числа l_2 , поэтому измерение длины пенала можно считать приемлемым. Наконец, та же величина 1 составляет ничтожную часть числа l_3 . Можно признать измерение длины комнаты точным.

Из примера видно, что для характеристики точности измерений знания абсолютной погрешности мало. Важным является соотношение между абсолютной погрешностью измерения и измеряемой величиной. Поэтому для оценки качества измерения используется относительная погрешность приближенного значения.

Относительной погрешностью приближенного значения называется отношение абсолютной погрешности к модулю приближенного значения. Относительную погрешность принято выражать в процентах.

Пример 2

Округлим число 24,7 до целых и получим 25. Найдем абсолютную погрешность приближенного значения $24,7 - 25 = -0,3$ — 0,3 и относительную погрешность приближенного значения $\frac{0,3}{25} = 0,012 = 1,2\%$.

При различных измерениях мы находим приближенное значение величины (не зная его точного значения). Поэтому не удастся вычислить абсолютную и относительную погрешности приближенного значения. В таких случаях ограничиваются оценкой относительной погрешности.

Пример 3

Вернемся к первому примеру. Так как при сделанных измерениях абсолютная погрешность не более 1, то для оценок относительной погрешности примем, что абсолютная погрешность максимальна (то есть равна 1). Найдем относительные погрешности измерений: первого — $\frac{1}{3} \approx 0,33 \approx 33\%$,

второго — $\frac{1}{8} \approx 0,125 \approx 12,5\%$, и третьего — $\frac{1}{513} \approx 0,002 \approx 0,2\%$. Реальные относительные погрешности не могут превышать найденные величины. Говорят, что в первом случае измерение выполнено с относительной погрешностью до 33 %, во втором случае — с относительной погрешностью до 12,5 % и в третьем случае — с относительной погрешностью до 0,2 %.

III. Задание на уроке

№ 534 (б, в); 536; 538; 541; 542.

IV. Контрольные вопросы

– Что называется относительной погрешностью приближенного значения?

– Как оценить относительную погрешность? Приведите примеры.

V. Задание на дом

№ 534 (а, г); 535; 537; 539; 540.

VI. Подведение итогов урока

Уроки 54–55. Контрольная работа № 4 по теме «Степень с натуральным показателем»

Контрольная работа составлена в шести вариантах (варианты 1, 2 – самые простые; варианты 5, 6 – самые сложные). Степень сложности меняется не слишком редко. Поэтому можно рекомендовать следующий критерий оценки: при решении вариантов 1, 2 оценка 3 ставится за любые три решенные задачи, оценка 4 – за четыре задачи и оценка 5 – за пять задач. Одна задача дает школьникам некоторую свободу выбора. При тех же критериях оценки за решение вариантов 3, 4 добавляется к набранному баллам дополнительно 0,5 балла; за решение вариантов 5, 6 – дополнительно – 1,0 балла (то есть оценка 5 ставится уже за 4 задачи). Все задачи в варианте примерно равноценны. Может быть несколько тяжелее задачи 5, 6.

Перед проведением контрольной работы учащихся целесообразно ознакомить с критериями оценки и разной сложностью вариантов. Выбор вариантов может быть осуществлен учителем или предоставлен учащимся (в этом случае предполагается наличие копировальной техники в школе и избыточное количество заданий работы). После урока-разбора контрольной решение всех задач шести вариантов может быть вывешено на стенде.

Вариант I

1. Дана функция $y = x^2 + 2$. Составьте таблицу значений функции в промежутке $-2 \leq x \leq 2$ с шагом 0,5 и постройте график функции.

2. Выполните действия:

а) $a^3 \cdot a^6$;

б) $a^7 : a^5$;

в) $(a^2)^4$;

г) $(a^2 \cdot b)^4$.

3. Запишите одночлен в стандартном виде:

а) $3 \cdot x^3 y \cdot z^2 \cdot (-2 \cdot z \cdot y^2 \cdot x)$;

б) $(4 \cdot a^3 \cdot b^3 \cdot c^3) : (-8 \cdot a^7 \cdot c^3 \cdot b^4)$.

4. Число 19,7 округлите до целых. Найдите абсолютную и относительную погрешности приближенного значения.

5. Решите уравнения:

а) $\frac{x^{27}}{x^{23}} \cdot \frac{x^{34}}{x^{32}} = 17$;

б) $\frac{2^x \cdot 16}{2^5} = 8$.

6. Докажите, что число $10^{50} - 4$ делится на 3.**Вариант II**1. Дана функция $y = 1 - x^2$. Составьте таблицу значений функции в промежутке $-2 \leq x \leq 2$ с шагом 0,5 и постройте график функции.

2. Выполните действия:

а) $a^4 \cdot a^5$;

б) $a^9 : a^6$;

в) $(a^4)^2$;

г) $(a^3 \cdot b^2)^2$.

3. Запишите одночлен в стандартном виде:

а) $5 \cdot x^2 \cdot y \cdot z^2 \cdot (-3 \cdot y \cdot x \cdot z^2)$;

б) $-8 \cdot a^7 \cdot b^5 \cdot c^4 : (-2 \cdot a^3 \cdot c \cdot b^2)^2$.

4. Число 20,3 округлите до целых. Найдите абсолютную и относительную погрешности приближенного значения.

5. Решите уравнения:

а) $\frac{x^{35}}{x^{42}} \cdot \frac{x^{29}}{x^{21}} = 23$;

б) $\frac{2^x \cdot 32}{2^3} = 64$.

6. Докажите, что число $10^{40} - 7$ делится на 3.**Вариант III**1. Дана функция $y = x^2 - 2x$. Составьте таблицу значений функции в промежутке $-1 \leq x \leq 3$ с шагом 0,5 и постройте график функции.

2. Выполните действия:

а) $3a^2 \cdot 5a^3 \cdot 2a^4$;

б) $a^{18} : a^6$;

в) $(a^3)^3 \cdot (a^2)^4$;

г) $\frac{a^2 b \cdot (ab^2)^2}{a^3 b^4}$.

3. Запишите одночлен в стандартном виде:

а) $5 \cdot (xy^2z^3)^2 \cdot (-2x^2zy^3)^3$;

б) $(2a^3b^2c^3)^3 : (-3ac^2b)^2$.

4. Сравните числа 2^{30} и 3^{20} .

5. Решите уравнения:

а) $\frac{(x^4)^3 \cdot (x^2)^5}{(x^4)^5} = 19$;

б) $\frac{(2^x)^2 \cdot 2^7}{2^5} = 16^2$.

6. Докажите, что число $196^{374} + 391^{164} - 2$ делится на 5.**Вариант IV**1. Дана функция $y = x^2 + 2x$. Составьте таблицу значений функции в промежутке $-3 \leq x \leq 1$ с шагом 0,5 и постройте график функции.

2. Выполните действия:

а) $2a^3 \cdot 3a^2 \cdot 4a^5$;

б) $a^{15} : a^5$;

в) $(a^3)^4 \cdot (a^3)^2$;

г) $\frac{a^3b^2 \cdot (a^2b)^3}{a^5b^3}$.

3. Запишите одночлен в стандартном виде:

а) $3 \cdot (yx^2z)^3 \cdot (-3x^2z^2y)^2$; б) $(3a^2b^3c^2)^3 \cdot (-2a^2cb^4)^2$.

4. Сравните числа 3^{40} и 4^{30} .

5. Решите уравнения:

а) $\frac{(x^7)^2 \cdot (x^3)^4}{(x^4)^5 \cdot x^2} = 21$;

б) $\frac{(3^x)^3 \cdot 3^5}{3^2} = 27^2$.

6. Докажите, что число $171^{536} + 375^{164} + 4$ делится на 5.**Вариант V**1. Дана функция $y = x^2 + 2|x|$. Составьте таблицу значений функции в промежутке $-3 \leq x \leq 3$ с шагом 0,5 и постройте график функции.

2. Запишите одночлены в стандартном виде:

а) $(a \cdot (a^2)^2 \cdot (a^3)^3)^2$;

б) $\frac{(2x^2y^2z^3)^3 \cdot (-3yz^4)^2}{yx^2z^5 \cdot (-5y^2xz)^2}$.

3. Сравните числа 7^{80} и 4^{120} .4. Определите последнюю цифру числа $(389)^{162} + (635)^{236}$.5. Решите уравнение: $(2^x)^2 \cdot 2^{x+5} = 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^9 \cdot 32$.6. Докажите, что число $10^{316} + 5$ делится на число $10^{19} - 1$.**Вариант VI**1. Дана функция $y = 2|x| - x^2$. Составьте таблицу значений функции в промежутке $-3 \leq x \leq 3$ с шагом 0,5 и постройте график функции.

2. Запишите одночлены в стандартном виде:

а) $(a \cdot (a^3)^2 \cdot (a^2)^3)^2$;

б) $\frac{(3x^2yz^2)^4 \cdot (-2y^2z^3)^2}{y^3x^2z^3 \cdot (-5y^3x^3z^4)^2}$.

3. Сравните числа 9^{60} и 4^{90} .4. Определите последнюю цифру числа $(289)^{364} + (536)^{171}$.5. Решите уравнение: $(3^x)^3 \cdot 3^{4x+3} = 3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot 3^{11} \cdot 9$.6. Докажите, что число $10^{273} + 7$ делится на число $10^{17} - 1$.**Урок 56. Анализ контрольной работы****Ход урока****I. Подведение итогов контрольной работы**

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Данные удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи/Итоги	1	2	3	...	6
+	5				
±	1				
-	1				
∅	1				

Обозначения:

+- число решивших задачу правильно или почти правильно;

± - число решивших задачу со значительными погрешностями;

-- число не решивших задачу;

∅ - число не решавших задачу.

Варианты 1, 2 - 8 учащихся.

2. Типичные ошибки при решении задач.

3. Задачи, вызвавшие наибольшие трудности, и их разбор (учителем или школьниками, решившими эту задачу).

II. Разбор задач вариантов

Вариант I

1.

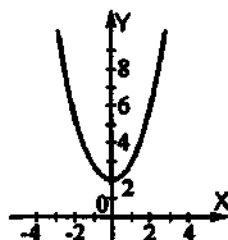


Рис. 1.81

2. а) a^9 ; б) a^2 ; в) a^8 ; г) $a^6 \cdot b^3$.

3. а) $-6x^4y^3z^3$; б) $-2a^3b^2c$;

4. 0,3; 1,5%.

5. а) $x=17$; б) $x=4$.

6. Доказано.

Вариант II

1.

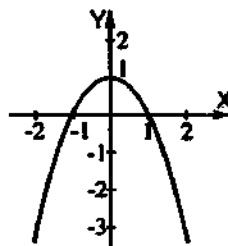


Рис. 1.82

2. а) a^9 ; б) a^3 ; в) a^8 ; г) $a^6 \cdot b^4$.
3. а) $-15x^3y^3z^3$; б) $-2abc^2$;
4. 0,3; 1,5%.
5. а) $x=23$; б) $x=4$.
6. Доказано.

Вариант III

1.

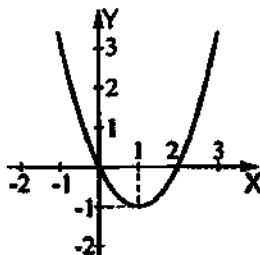


Рис. 1.83

2. а) $30a^6$; б) a^{12} ; в) a^{23} ; г) $a \cdot b$.
3. а) $-16x^8y^{13}z^9$; б) $\frac{8}{9}a^7b^4c^5$;
4. $2^{30} < 3^{20}$.
5. а) $x=19$; б) $x=3$.
6. Доказано.

Вариант IV

1.

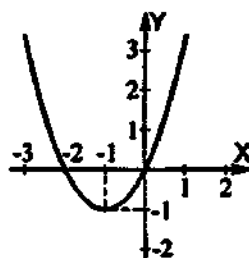


Рис. 1.84

2. а) $24a^{10}$; б) a^{10} ; в) a^{18} ; г) $a^4 \cdot b^2$.
3. а) $27x^{10}y^5z^7$; б) $\frac{27}{4}a^2bc^4$;
4. $3^{40} > 4^{30}$.
5. а) $x=21$; б) $x=1$.
6. Доказано.

Вариант V

1. Решение

Для функции $y = x^2 - 2|x|$ составим таблицу значений функции в промежутке $-3 \leq x \leq 3$ с шагом 0,5.

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	3	1,25	0	-0,75	-1	-0,75	0	-0,75	-1	-0,75	0	1,25	3

Отметим точки из таблицы на координатной плоскости и изобразим эскиз графика данной функции. Легко проверить, что функция является четной. И ее график симметричен относительно оси.

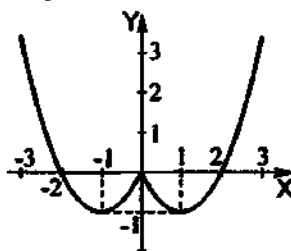


Рис. 1.85

2. Решение

Используем правила действия со степенями и получим:

$$а) (a \cdot (a^5)^2 \cdot (a^3)^3)^2 = (a \cdot a^4 \cdot a^9)^2 = (a^{14})^2 = a^{28};$$

$$б) \frac{(2x^2y^2z^3)^3 \cdot (-3yz^4)^2}{yx^2z^5 \cdot (-5y^2xz)^2} = \frac{8x^4y^5z^9 \cdot 9y^2z^8}{x^2yz^5 \cdot 25x^2y^4z^2} = \frac{(8 \cdot 9)x^4 \cdot (y^6 \cdot y^2) \cdot (z^9 \cdot z^8)}{25(x^2 \cdot x^2) \cdot (y \cdot y^4) \cdot (z^5 \cdot z^2)} =$$

$$= \frac{72x^4y^8z^{17}}{25x^4y^5z^7} = \frac{72}{25}y^3z^{10}.$$

$$(Ответ: а) a^{28}; б) \frac{72}{25}y^3z^{10})$$

3. Запишем данные числа 7^{80} и 4^{120} в другом виде: $7^{80} = (7^2)^{40} = 49^{40}$ и $4^{120} = (4^3)^{40} = 64^{40}$. Так как $49 < 64$, то и $49^{40} < 64^{40}$ или $7^{80} < 4^{120}$.
(Ответ: $7^{80} < 4^{120}$.)

4. Решение

Запишем данное число в виде: $(389)^{162} + (635)^{236} = (389^2)^{81} + (635)^{236}$. Число 389 оканчивается цифрой 9. При возведении в квадрат число 389² оканчивается цифрой 1. Если число оканчивается цифрой 1 и 5, то при возведении таких чисел в любую степень, число также будет оканчиваться цифрой 1 и 5. Поэтому последняя цифра данного числа $1 + 5 = 6$.

(Ответ: 6.)

5. Решение

Используя свойства степеней, преобразуем данное уравнение:

$$(2^x)^2 \cdot 2^{x+5} = 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^9 \cdot 32 \text{ или } 2^{2x} \cdot 2^{x+5} = 2^{1+2+\dots+9} \cdot 2^5.$$

Найдем сумму чисел $1 + 2 + \dots + 9 = (1 + 9) + (2 + 8) + (3 + 7) + (4 + 6) + 5 = 4 \cdot 10 + 5 = 45$. Тогда уравнение имеет вид: $2^{2x+x+5} = 2^{45} \cdot 2^5$ или $2^{3x+5} = 2^{50}$.

Так как равны степени с одинаковым основанием 2, то равны показатели степеней: $3x + 5 = 50$ или $3x = 45$, откуда $x = 15$.

(Ответ: $x = 15$.)

6. Решение

Рассмотрим число $10^{316} + 6$. Число 10^{316} состоит из единицы и 316 нулей. Тогда число 10^{316} состоит из единицы и 316 нулей. Тогда число $10^{316} + 6$ имеет вид 100 ... 06. Сумма цифр этого числа равна 7 и по признаку делимости оно не делится на 9. Число 10^{19} состоит из единицы и 19 нулей. Поэтому число $10^{19} - 1$ состоит из 19 девяток (то есть 99 ... 9) и делится на 9. Так как первое число $10^{316} + 6$ не имеет делителя 9, то оно не может без остатка делиться на второе число $10^{19} - 1$.

(Ответ: доказано.)

Вариант VI

1. Для функции $2|x| - x^2$ составим таблицу значений функции в промежутке $-3 \leq x \leq 3$ с шагом 0,5.

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	-3	1,25	0	0,75	1	0,75	0	0,75	1	0,75	0	-1,25	-3

Отметим эти точки на координатной плоскости и построим график данной функции. Данная функция является четной и ее график симметричен относительно оси ординат.

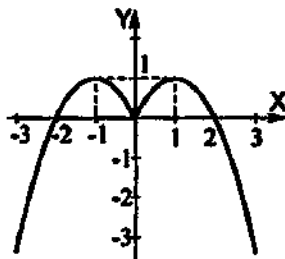


Рис. 1.86

2. Решение

Используем правила действий со степенями, запишем одночлен в стандартном виде:

$$a) (a \cdot (a^3)^2 \cdot (a^2)^3)^2 = (a \cdot a^6 \cdot a^6)^2 = (a^{1+6+6})^2 = (a^{13})^2 = a^{26};$$

$$б) \frac{(3x^2yz^2)^4 \cdot (-2y^2z^3)^2}{y^3x^2z^3 \cdot (-3y^2x^3z^4)^2} = \frac{(9x^8y^4z^4) \cdot 4y^4z^6}{y^3x^2z^3 \cdot (25y^4x^6z^8)} = \frac{(9 \cdot 4) \cdot x^8 \cdot (y^4 \cdot y^4) \cdot (z^4 \cdot z^6)}{25(x^2 \cdot x^6) \cdot (y^3 \cdot y^4) \cdot (z^3 \cdot z^8)} =$$

$$= \frac{36x^8y^8z^{10}}{25x^8y^7z^{11}} = \frac{36}{25}x^{8-8} \cdot y^{8-7} \cdot z^{10-11} = \frac{36}{25}yz^{-1}.$$

$$(\text{Ответ: } a^{26}; \frac{36}{25}yz^{-1}.)$$

3. Решение

Данные числа 9^{60} и 4^{90} запишем в виде чисел с одинаковыми показателями степенями: $9^{60} = (9^2)^{30} = 81^{30}$ и $4^{90} = (4^3)^{30} = 64^{30}$. Так как $81 > 64$, то и $81^{30} > 64^{30}$ или $9^{60} > 4^{90}$.

$$(\text{Ответ: } 9^{60} > 4^{90}.)$$

4. Решение

Запишем данное число в виде $(289)^{364} + (536)^{171} - (289^2)^{182} + (536)^{171}$. Число 289 оканчивается цифрой 9, при возведении в квадрат число 289² оканчивается цифрой 1. При возведении такого числа в любую степень $(289^2)^{182}$ оно будет также оканчиваться цифрой 1. Число 536 оканчивается цифрой 6. При возведении такого числа в любую степень $(536)^{171}$ оно будет также оканчиваться цифрой 6. Поэтому данное число оканчивается цифрой $1 + 6 = 7$.

$$(\text{Ответ: } 7.)$$

5. Решение

Используя свойства степеней, преобразуем данное уравнение. Получаем: $(3^x)^3 \cdot 3^{4+x} = 3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot 3^{11} \cdot 9$ или $3^{3x} \cdot 3^{4+x} = 3^{1+2+3+\dots+11} \cdot 3^2$. Найдём сумму чисел: $1 + 2 + 3 + \dots + 11 = (1 + 11) + (2 + 10) + (3 + 9) + (4 + 8) + (5 + 7) + 6 = 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 6 = 12 \cdot 5 + 6 = 60 + 6 = 66$. Тогда уравнение имеет вид: $3^{3x} \cdot 3^{4+x} = 3^{66} \cdot 3^2$ или $3^{4x+4} = 3^{68}$. Так как равны степени чисел с одинаковым основанием 3, то равны и показатели степеней: $4x + 4 = 68$ или $4x = 64$, откуда $x = 16$.

$$(\text{Ответ: } x = 16.)$$

6. Решение

Число 10^{273} состоит из одной единицы и 273 нулей. Тогда число $10^{273} + 7$ состоит из одной единицы, 272 нулей и цифры 7, то есть имеет вид 100 ... 07. Сумма цифр этого числа равна 8 и такое число по признаку делимости не делится на 9. Число 1019 состоит из одной единицы и 19 нулей. Поэтому число $10^{19} - 1$ состоит из 19 цифр 9, то есть имеет вид 99 ... 9. Очевидно, что такое число делится на 9, так как каждая цифра числа делится на 9. Следовательно, число $10^{273} + 7$ не делится на число $10^{19} - 1$ без остатка, так как не имеет делителя 9.

$$(\text{Ответ: доказано.})$$

Уроки 57–58. Подготовка к тематическому зачету

Цель: повторить решение задач по теме «Степень и ее свойства».

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Основные понятия

При решении задач напомнить нужные сведения из раздела 6 (уроки 41–46).

III. Задание на уроке

№ 548 (а, б); 552 (а, в); 558 (а); 559 (а); 560 (а, в, д); 563; 565 (а); 568 (а); 570 (а, б); 573 (а); 574; 578 (а, б); 583 (а, в); 585 (а); 587 (а).

IV. Задание на дом

№ 548 (в, г); 552 (б, г); 558 (б); 559 (б); 560 (б, г, е); 564; 565 (б); 568 (б); 570 (в, г); 573 (б); 575; 578 (в, г); 583 (б, г); 585 (б); 587 (б).

V. Подведение итогов урока

Урок 59. Подготовка к тематическому зачету

Цель: повторить решение задач по теме «Одночлены».

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Основные понятия

При решении задач напомнить нужные сведения из раздела 7 (уроки 47–51).

III. Задание на уроке

№ 589 (б); 590 (а, в, д); 591 (а, в); 593 (а, г); 596 (а, в); 597 (а); 599 (а, г, е); 602; 604; 605 (а, б).

IV. Задание на дом

№ 589 (в); 590 (б, г, е); 591 (г, е); 593 (б, д); 596 (б, г); 597 (г); 600 (б, г, е); 605 (в, г).

V. Подведение итогов урока

Урок 60. Подготовка к тематическому зачету

Цель: повторить решение задач по теме «Абсолютная и относительная погрешности».

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Основные понятия

При решении задач напомним нужные сведения из раздела 8 (уроки 52, 53).

III. Задание на уроке

№ 606 (а); 607; 609; 611; 613; 615.

IV. Задание на дом

№ 606 (б); 608; 610; 612; 614.

V. Подведение итогов урока

Уроки 61–62. Зачет по теме «Степень с натуральным показателем»

Цели: сравнение успеваемости учащихся при одинаковой сложности заданий, возможность повышения оценок за выполненные контрольные работы.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Характеристика зачетной работы

Работа составлена в двух равноценных вариантах. По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий. Соответственно у учащихся возрастает возможность выбора задач. Все задания разбиты на три блока А, В и С. Самые простые задачи находятся в части А, более сложные – в части В, еще сложнее – в части С. Каждая задача из А оценивается в 1 балл, из В – в два балла, из С – в три балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка 3 ставится за 6 баллов, оценка 4 – за 10 баллов, оценка 5 – за 14 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Поэтому разбору заданий работы занятия можно и не посвящать (решения задач могут быть вывешены на стенде). Для стендового размещения разбор вариантов приводится.

Вариант I

А.

1. Вычислите: $\frac{11^2 - 5 \cdot 3^3 + 3 \cdot 2^4}{6^3 - 15 \cdot 4^2 + 5 \cdot 2^3}$.

2. Найдите значение одночлена $7a^2b^2c$ при $a=2$, $b=\frac{1}{3}$ и $c=\frac{1}{5}$.

3. Докажите, что число $1723^{2576} - 3$ является составным.

4. Выполните действия:

а) $(3x^2yz^3)^2 \cdot (2xy^2z)^3$; б) $(4x^3y^2z^4)^2 : (6xyz^2)^3$.

5. График функции $y = ax^2$ проходит через точку А (3, 4). Найдите коэффициент a .

6. Составьте таблицу значений функции $y = (x+1)^2$ в промежутке $-3 \leq x \leq 1$ шагом 0,5 и постройте график функции.

7. С помощью рулетки с ценой деления 1 см измерили высоту телеграфного столба и получили 507 см. Оцените абсолютную и относительную погрешности измерения.

В.

8. Определите последнюю цифру числа $327^{153} + 536^{164}$.

9. Сколько сомножителей (слагаемых) находится в правой части равенства?

а) $2^{300} = 2 \cdot 2 \cdot \dots$; б) $2^{300} = 2 + 2 + \dots + 2$.

10. График функции $y = ax^2 + b$ проходит через точки А (0; 3) и В (2; -3). Найдите величины a и b .

11. Постройте график функции $y = x^2 + \frac{|x|}{x}$.

С.

12. Докажите, что число $3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{120}$ без остатка делится на 5.

13. Выполните действия: $\frac{x^n \cdot y^{2n+1} \cdot (x^2y)^n}{(x^ny^n)^3}$.

14. Постройте график уравнения $|y - x^2| = 2x$.

Вариант II

А.

1. Вычислите: $\frac{13^2 - 7 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^4}{7^2 - 11 \cdot 4^2 + 6 \cdot 2^5}$.

2. Найдите значение одночлена $5a^2b^2c$ при $a=\frac{1}{2}$, $b=3$ и $c=\frac{1}{5}$.

3. Докажите, что число $1927^{1634} - 7$ является составным.

4. Выполните действия:

а) $(2xy^3z^2)^3 \cdot (3x^2yz)^2$; б) $(5x^2y^3z^4)^3 : (3x^2yz^2)^3$.

5. График функции $y = ax^2$ проходит через точку А (–3, 5). Найдите коэффициент a .

6. Составьте таблицу значений функции $y = (x - 1)^2$ в промежутке $-1 \leq x \leq 3$ шагом 0,5 и постройте график функции.

7. С помощью рулетки с ценой деления 1 см измерили длину бревна и получили 408 см. Оцените абсолютную и относительную погрешности измерения

В.

8. Определите последнюю цифру числа $523^{161} + 171^{234}$.

9. Сколько сомножителей (слагаемых) находится в правой части равенства?

а) $3^{200} = 3 \cdot 3 \cdot \dots$; б) $3^{200} = 3 + 3 + \dots + 3$.

10. График функции $y = ax^2 + b$ проходит через точки А (0; 2) и В (2; –4). Найдите величины a и b .

11. Постройте график функции $y = x^2 + \frac{x}{|x|}$.

С.

12. Докажите, что число $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{160}$ без остатка делится на 5.

13. Выполните действия: $\frac{x^{2n} \cdot y^{n+1} \cdot (x^ny^n)^2}{x^n(x^3y^3)^n}$.

14. Постройте график уравнения $|y - x^2| = 2x$.

III. Разбор заданий

Вариант I

1. Решение

Используя определение степени с натуральным показателем, получа-

ем: $\frac{11^2 - 5 \cdot 3^3 + 3 \cdot 2^4}{6^3 - 15 \cdot 4^2 + 5 \cdot 2^3} = \frac{121 - 5 \cdot 27 + 3 \cdot 16}{216 - 15 \cdot 16 + 5 \cdot 8} = \frac{121 - 135 + 48}{216 - 240 + 40} = \frac{34}{16} = \frac{17}{8} = 2\frac{1}{8}$.

(Ответ: $2\frac{1}{8}$.)

2. Решение

Подставим данные значения величин $a = 2$, $b = \frac{1}{3}$ и $c = \frac{1}{5}$ в одно-

член $7a^2b^2c$ и получим: $7 \cdot 2^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) = 7 \cdot 8 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{5} = \frac{56}{45} = 1\frac{11}{45}$.

(Ответ: $1\frac{11}{45}$.)

3. Решение

Очевидно, что любое нечетное число в любой степени будет числом нечетным. Поэтому число 1723^{2576} – нечетное. Разность двух нечетных чисел будет числом четным. Следовательно, число $1723^{2576} - 3$ является четным и делится без остатка на 2. Так как данное число кроме единицы и самого себя имеет другой делитель, то по определению оно является составным.

(Ответ: доказано.)

4. Решение

Используем свойства степеней и выполним действия:

$$\text{а) } (3x^2yz^3)^2 \cdot (2xy^2z)^3 = 3^2 \cdot (x^2)^2 \cdot y^2 \cdot (z^3)^2 \cdot 2^3 \cdot x^3 \cdot (y^2)^3 \cdot z^3 = \\ = (9 \cdot 8) \cdot (x^4 \cdot x^3) \cdot (y^2 \cdot y^6) \cdot (z^6 \cdot z^3) = 72x^7y^8z^9.$$

$$\text{б) } (4x^3y^2z^4)^2 : (6xyz^2)^3 = (4^2 \cdot x^6 \cdot y^4 \cdot z^8) : (6^3 \cdot x^3 \cdot y^3 \cdot z^6) = \\ = (16 : 216) \cdot (x^6 : x^3) \cdot (y^4 : y^3) \cdot (z^8 : z^6) = (16 : 216) \cdot x^{6-3} \cdot y^{4-3} \cdot z^{8-6} = \frac{2}{27} x^3 y z^2.$$

(Ответ: а) $72x^7y^8z^9$; б) $\frac{2}{27} \cdot x^3yz^2$.)

5. Решение

Так как график функции $y = ax^2$ проходит через точку А (3; 4), то координаты этой точки удовлетворяют уравнению функции, то есть

$$4 = a \cdot 3^2 \text{ или } 4 = a \cdot 9, \text{ откуда } a = \frac{4}{9}.$$

(Ответ: $a = \frac{4}{9}$.)

6. Решение

Составим таблицу значений функции $y = (x+1)^2$ в промежутке $-3 \leq x \leq 1$ с шагом 0,5.

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1
y	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4

Отметим эти точки на координатной плоскости и построим график данной функции.

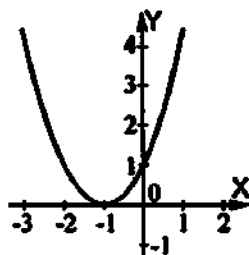


Рис. 1.87

Можно догадаться, что этот график может быть получен из графика функции $y = x^2$ его сдвигом на одну единицу влево.

7. Решение

При измерении высоты столба мы находим его приближенное значение $l = 507$ (в см), точное значение высоты l_0 мы не знаем. Можно утверждать, что разница между точным l_0 и приближенным l значениями высоты не больше цены деления измерительного прибора (рулетки), то есть $|l - l_0| \leq 1$. Другими словами, измерение высоты выполнено с точностью до 1 см или абсолютная погрешность измерения не более 1 см. Для оценки относительной погрешности примем, что абсолютная погрешность максимальна, то есть равна 1. Тогда относительная погрешность будет не более $\frac{1}{507} \cdot 100 \approx 0,2\%$.

(Ответ: 1; 0,2 %.)

8. Решение

Сначала определим последнюю цифру числа 327^{153} . Для этого найдем остаток от деления показателя степени 153 на 4. Он равен 1, то есть $153 = 4 \cdot 38 + 1$. Тогда $327^{153} = 327^{4 \cdot 38 + 1}$. Так как при возведении числа в степень его последняя цифра повторяется через каждые 4 степени (см. таблицу урока 44), то последние цифры чисел 327^{153} и 327^1 одинаковы и равны 7. Число, которое оканчивается цифрой 6, в любой степени также будет оканчиваться цифрой 6, то есть 536^{164} оканчивается цифрой 6. Тогда последняя цифра числа $327^{153} + 536^{164}$ определяется суммой последних цифр этих чисел $7 + 6 = 13$ и равна 3.

(Ответ: 3.)

9. Решение

а) Пусть в правой части равенства $2^{300} = 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2$ находится n одинаковых множителей 2. Тогда по определению степени с натуральным показателем имеем $2^{300} = 2^n$. Так как равны степени с одинаковым основанием 2, то равны и показатели степеней $300 = n$. Таким образом, в правой части находится 300 сомножителей.

б) Пусть в правой части равенства $2^{300} = 2 + 2 + \dots + 2$ находится n одинаковых слагаемых 2. Заменим сложение умножением и получим $2^{300} = 2n$, откуда $n = 2^{300} : 2 = 2^{299}$. Таким образом, в правой части находится 2^{299} слагаемых.

(Ответ: а) 300; б) 2^{299} .)

10. Решение

Так как график функции $y = ax^2 + b$ проходит через точки А (0; 3) и В (2; -3), то координаты этих точек удовлетворяют уравнению функции. Сначала запишем условие прохождения графика через точку А: $3 = a \cdot 0^2 + b$, откуда $b = 3$. Теперь функция имеет вид $y = ax^2 + 3$. Запишем условие прохождения графика через точку В: $-3 = a \cdot 2^2 + 3$ или $-6 = 4a$, откуда $a = -6 : 4 = -1,5$.

(Ответ: $a = -1,5$; $b = 3$.)

11. Решение

Для построения графика функции $y = x^2 + \frac{|x|}{x}$ учтем, что $x \neq 0$, и раскроем знак модуля. При $x < 0$ имеем $|x| = -x$ и функция имеет вид:

$$y = \frac{-x}{x} = x^2 - 1.$$

В промежутке $x < 0$ построим график $y = x^2 - 1$ (он получается смещением графика $y = x^2$ на одну единицу вниз).

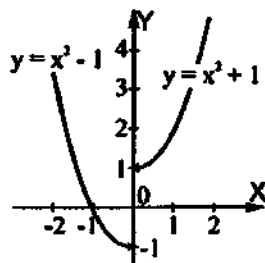


Рис. 1.88

При $x > 0$ имеем $|x| = x$ и функция имеет вид $y = x^2 + \frac{x}{x} = x^2 + 1$. В промежутке $x > 0$ построим график $y = x^2 + 1$ (он получается смещением графика $y = x^2$ на единицу вверх). Стрелками показано, что при $x = 0$ функция не определена (не имеет смысла).

12. Решение

Учтем, что при возведении любого числа в степень его последняя

цифра повторяется при изменении показателя степени на 4. Поэтому в данной сумме последовательно сгруппируем слагаемые по 4 и получим: $3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{120} = (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + (3^5 + 3^6 + 3^7 + 3^8) + \dots + (3^{117} + 3^{118} + 3^{119} + 3^{120})$. Разберемся со слагаемыми в первой скобке: число 3 оканчивается на 3, число 3^2 – на 9, число 3^3 – на 7, число 3^4 – на 1. Поэтому последняя цифра числа $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4$ определяется суммой последних цифр слагаемых: $3 + 9 + 7 + 1 = 20$, то есть последняя цифра этой суммы равна 0. Очевидно, что числа $3^5, 3^9, \dots, 3^{118}$ оканчиваются той же цифрой, что и число 3; числа $3^6, 3^{10}, \dots, 3^{119}$ – той же цифрой, что и число 3^2 и так далее. Тогда очевидно, что суммы слагаемых в каждой скобке оканчиваются одной и той же цифрой 0. Поэтому сумма всех слагаемых оканчивается цифрой 0. По признаку делимости такое число без остатка делится на 5.

(Ответ: доказано.)

13. Решение

$$\begin{aligned} & \text{Используем свойства степеней и выполним действия: } \frac{x^a \cdot y^{2a+1} \cdot (x^2 y)^n}{(x^a y^a)^3} = \\ &= \frac{x^a \cdot y^{2a+1} \cdot (x^{2n} \cdot y^n)}{x^{3a} \cdot y^{3a}} = \frac{(x^a \cdot x^{2n}) \cdot (y^{2a+1} \cdot y^n)}{x^{3a} \cdot y^{3a}} = \frac{x^{a+2n} \cdot y^{2a+1+n}}{x^{3a} \cdot y^{3a}} = \frac{x^{3n} \cdot y^{3n+1}}{x^{3n} \cdot y^{3n}} = \\ &= y^{2n+1-3n} = y^1 = y. \end{aligned}$$

(Ответ: y .)

14. Решение

Для построения графика зависимости $|y - x^2| = 2x$ учтем, что $2x \geq 0$, так как левая часть равенства при всех x и y неотрицательна. Тогда модульное выражение $y - x^2 = 2x$ или $y - x^2 = -2x$, то есть $y = x^2 + 2x$. Построим эти зависимости (например, построив таблицы значений этих функций) в промежутке $x \geq 0$.

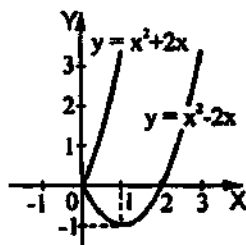


Рис. 1.89

Вариант II

1. Решение

Используя определение степени с натуральным показателем, получа-

$$\text{см: } \frac{13^2 - 7 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^4}{7^2 - 11 \cdot 4^2 + 6 \cdot 2^5} = \frac{169 - 7 \cdot 8 + 5 \cdot 16}{49 - 11 \cdot 16 + 6 \cdot 32} = \frac{169 - 56 + 80}{49 - 176 + 192} = \frac{193}{65} = 2 \frac{63}{65}.$$

(Ответ: $2 \frac{63}{65}$.)

2. Решение

Подставим данные значения величин $a = \frac{1}{2}$, $b = 3$ и $c = \frac{1}{5}$ в одночлен $5a^2b^3c$ и получим: $5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 3^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) = 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot 27 \cdot \frac{1}{5} = \frac{27}{4} = 6 \frac{3}{4}$.

(Ответ: $6 \frac{3}{4}$.)

3. Решение

Очевидно, что любое нечетное число в любой степени будет числом нечетным. Поэтому число 1927^{1634} – нечетное. Разность двух нечетных чисел будет числом четным. Следовательно, число $1927^{1634} - 7$ является четным и делится без остатка на 2. Так как данное число кроме единицы и самого себя имеет другой делитель, то по определению оно является составным.

(Ответ: доказано.)

4. Решение

Используем свойства степеней и выполним действия:

$$\begin{aligned} \text{а) } (2xy^3z^3)^3 \cdot (3x^2yz)^2 &= 2^3 \cdot x^3 \cdot (y^3)^3 \cdot (z^3)^3 \cdot 3^2 \cdot (x^2)^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = \\ &= (8 \cdot 9) \cdot (x^3 \cdot x^4) \cdot (y^9 \cdot y^2) \cdot (z^9 \cdot z^2) = 72x^7y^{11}z^{11}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } (5x^2y^3z^4)^3 : (3x^2yz^2)^2 &= (5^3 \cdot x^6 \cdot y^9 \cdot z^{12}) : (3^2 \cdot x^4 \cdot y^2 \cdot z^4) = \\ &= (125 : 9) \cdot (x^6 : x^4) \cdot (y^9 : y^2) \cdot (z^{12} : z^4) = (125 : 9) \cdot x^{6-4} \cdot y^{9-2} \cdot z^{12-4} = \frac{125}{9} x^2 y^7 z^8. \end{aligned}$$

(Ответ: а) $72x^7y^{11}z^{11}$; б) $\frac{125}{9}x^2y^7z^8$.)

5. Решение

Так как график функции $y = ax^2$ проходит через точку А (-3; 5), то координаты этой точки удовлетворяют уравнению функции, то есть $5 = a \cdot (-3)^2$ или $5 = a \cdot 9$, откуда $a = \frac{5}{9}$.

(Ответ: $a = \frac{5}{9}$.)

6. Решение

Составим таблицу значений функции $y = (x-1)^2$ в промежутке $-1 \leq x \leq 1$ с шагом 0,5.

x	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4

Отметим эти точки на координатной плоскости и построим график данной функции.

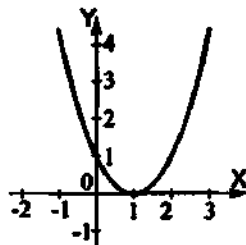


Рис. 1.90

Можно догадаться, что этот график может быть получен из графика функции $y = x^2$ его сдвигом на одну единицу вправо.

7. Решение

При измерении высоты столба мы находим его приближенное значение $l = 408$ (в см), точное значение высоты l_0 мы не знаем. Можно утверждать, что разница между точным l_0 и приближенным l значениями высоты не больше цены деления измерительного прибора (рулетки), то есть $|l - l_0| \leq 1$. Другими словами, измерение высоты выполнено с точностью до 1 см или абсолютная погрешность измерения не более 1 см. Для оценки относительной погрешности примем, что абсолютная погрешность максимальна, то есть равна 1. Тогда относительная погрешность будет не более $\frac{1}{408} \cdot 100 \approx 0,25\%$.

(Ответ: 1; 0,25 %.)

8. Решение

Сначала определим последнюю цифру числа 523^{161} . Для этого найдем остаток от деления показателя степени 161 на 4. Он равен 1, то есть $161 = 4 \cdot 40 + 1$. Тогда $523^{161} = 523^{4 \cdot 40 + 1}$. Так как при возведении числа в степень его последняя цифра повторяется через каждые 4 степени (см. таблицу урока 44), то последние цифры числа 523^{161} и 523^1 одинаковы и равны 3. Число, которое оканчивается цифрой 5, в любой степени также будет оканчиваться цифрой 5, то есть 175^{234} оканчивается цифрой 5. Тогда последняя цифра числа $523^{161} + 175^{234}$ определяется суммой последних цифр этих чисел $3 + 5 = 8$ и равна 8.

(Ответ: 8.)

9. Решение

а) Пусть в правой части равенства $3^{200} = 3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3$ находится n одинаковых множителей 3. Тогда по определению степени с натуральным показателем имеем $3^{200} = 3^n$. Так как равны степени с одинаковым основанием 3, то равны и показатели степеней $200 = n$. Таким образом, в правой части находится 200 сомножителей.

б) Пусть в правой части равенства $3^{200} = 3 + 3 + \dots + 3$ находится n одинаковых слагаемых 3. Заменим сложение умножением и получим $3^{200} = 3n$, откуда $n = 3^{200} : 3 = 3^{199}$. Таким образом, в правой части находится 3^{199} слагаемых.

(Ответ: а) 200; б) 3^{199} .)

10. Решение

Так как график функции $y = ax^2 + b$ проходит через точки А (0; 2) и В (2; -4), то координаты этих точек удовлетворяют уравнению функции. Сначала запишем условие прохождения графика через точку А: $2 = a \cdot 0^2 + b$, откуда $b = 2$. Теперь функция имеет вид $y = ax^2 + 2$. Запишем условие прохождения графика через точку В: $-4 = a \cdot 2^2 + 2$ или $-6 = 4a$, откуда $a = -6 : 4 = -1,5$.

(Ответ: $a = -1,5$; $b = 2$.)

11. Решение

Для построения графика функции $y = x^2 + \frac{x}{|x|}$ учтем, что $x \neq 0$, и раскроем знак модуля. При $x < 0$ имеем $|x| = -x$ и функция имеет вид:

$$y = x^2 - \frac{x}{-x} = x^2 + 1.$$

В промежутке $x < 0$ построим график $y = x^2 + 1$ (он получается смещением графика $y = x^2$ на одну единицу вверх).

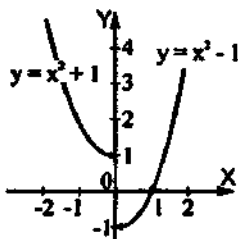


Рис. 1.91

При $x > 0$ имеем $|x| = x$ и функция имеет вид $y = x^2 - \frac{x}{x} = x^2 - 1$. В промежутке $x > 0$ построим график $y = x^2 - 1$ (он получается смещением

графика $y = x^2$ на единицу вниз). Стрелками показано, что при $x = 0$ функция не определена (не имеет смысла).

12. Решение

Учтем, что при возведении любого числа в степень его последняя цифра повторяется при изменении показателя степени на 4. Поэтому в данной сумме последовательно сгруппируем слагаемые по 4 и получим: $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{160} = (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + (2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8) + \dots + (2^{157} + 2^{158} + 2^{159} + 2^{160})$. Разберемся со слагаемыми в первой скобке: число 2 оканчивается на 2, число 2^2 – на 4, число 2^3 – на 8, число 2^4 – на 6. Поэтому последняя цифра числа $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4$ определяется суммой последних цифр слагаемых: $2 + 4 + 8 + 6 = 20$, то есть последняя цифра этой суммы равна 0. Очевидно, что числа $2^5, 2^9, \dots, 2^{157}$ оканчиваются той же цифрой, что и число 2; числа $2^6, 2^{10}, \dots, 2^{158}$ – той же цифрой, что и число 2^2 и так далее. Тогда очевидно, что суммы слагаемых в каждой скобке оканчиваются одной и той же цифрой 0. Поэтому сумма всех слагаемых оканчивается цифрой 0. По признаку делимости такое число без остатка делится на 5.

(Ответ: доказано.)

13. Решение

$$\begin{aligned} &\text{Используем свойства степеней и выполним действия: } \frac{x^{2n} \cdot y^{n+1} \cdot (x^n y^n)^2}{x^n (x^3 y^3)^n} = \\ &\frac{x^{2n} \cdot y^{n+1} \cdot (x^{2n} \cdot y^{2n})}{x^n \cdot x^{3n} y^{3n}} = \frac{(x^{2n} \cdot x^{2n}) \cdot (y^{n+1} \cdot y^{2n})}{(x^n \cdot y^{3n}) \cdot y^{3n}} = \frac{x^{2n+2n} \cdot y^{n+1+2n}}{x^{n+3n} \cdot y^{3n}} = \frac{x^{4n} \cdot y^{3n+1}}{x^{4n} \cdot y^{3n}} = \\ &= y^{3n+1-3n} = y^1 = y. \end{aligned}$$

(Ответ: y .)

14. Решение

Для построения графика зависимости $|y - x^2| = -2x$ учтем, что $-2x \geq 0$ или $x \leq 0$, так как левая часть равенства при всех x и y неотрицательна. Тогда подмодульное выражение $y - x^2 = -2x$ или $y - x^2 = -(-2x)$, то есть $y = x^2 + 2x$. Построим эти зависимости (например, построив таблицы значений этих функций) в промежутке $x \leq 0$.

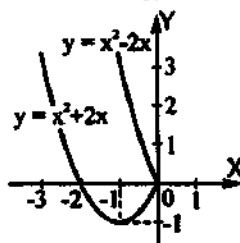


Рис. 1.92

II полугодие

Глава IV. Многочлены

§ 9. Сумма и разность многочленов

Урок 63. Многочлен и его стандартный вид

Цель: ознакомить с понятием многочлена и его записью в стандартном виде, понятием степени многочлена.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Изучение нового материала

Многочленом называется алгебраическая сумма (т. е. сумма или разность) одночленов. Одночлены, входящие в многочлен, называются членами многочлена.

Пример 1

а) Выражения $3a^2 - 5ab^3$, $7x^3 - 5x^2y + 3xy^2 - 10y^7 + 8$ являются многочленами. Так как являются алгебраическими суммами одночленов (члены первого многочлена $3a^2$ и $-5ab^3$, второго: $7x^3$, $-5x^2y$, $3xy^2$, $-10y^7$ и 8).

б) выражения $3a^2 - 5a:b^3$, $(7x^3 - 5x^2):y + 3xy^3 - 10:y^7 + 8$ не являются многочленами, так как состоят не только из одночленов (содержат операции деления).

Многочлен, состоящий из двух членов, называется двузначным; из трех членов — трехзначным.

В многочленах принято алгебраические суммы подобных одночленов заменять одним одночленом. Такая операция называется приведением подобных членов.

Пример 2

Упростить многочлен $A = 7ab - 3bc + ac - 2ab - 4bc + 3ab + bc$.

В многочлене A есть две группы подобных одночленов: $7ab$, $-2ab$, $3ab$ и $-3bc$, $-4bc$, bc . Кроме того, есть многочлен ac , который не имеет себе подобных в многочлене A . Сгруппируем в A указанные группы одночленов, т. е. запишем A в виде: $A = (7ab - 2ab + 3ab) + (-3bc - 4bc) + ac$

Далее учтем, что $7ab - 2ab + 3ab = ab \cdot (7 - 2 + 3) = ab \cdot 8 = 8ab$;
 $-3bc - 4bc + bc = bc \cdot (-3 - 4 + 1) = bc \cdot (-6) = -6bc$.

Поэтому многочлен имеет вид: $A = 8ab - 6bc + ac$.

Полученный многочлен A имеет стандартный вид, так как каждый входящий в него одночлен записан в стандартном виде и приведены подобные члены.

Больше ничего для записи многочлена в стандартном виде не требуется. Порядок слагаемых уже не важен. И, например, запись многочлена $A = ac + 8ab - 6bc$ также считается его стандартным видом.

Таким образом, в отличие от одночлена, многочлен может быть записан в стандартном виде не единственным способом, а несколькими.

Степенью многочлена стандартного вида называют наибольшую из степеней, входящих в него одночленов. В примере 2 все одночлены, входящие в многочлен A , имели степень 2. Поэтому и данный многочлен имел вторую степень. Для определения степени произвольного многочлена его предварительно надо записать в стандартном виде.

Пример 3

Записать в стандартном виде многочлен:

$$A = 3ab \cdot 2bc - 3a^2bc + 2a(-b^2c) + ac(-4ab) + 2a(-4bc).$$

Прежде всего, запишем каждый из входящих в A одночленов в стандартном виде:

$$A = 6ab^2c - 3a^2bc - 2ab^2c - 4a^2bc - 8abc.$$

Сгруппируем в A подобные члены:

$$A = (6ab^2c - 2ab^2c) + (-3a^2bc - 4a^2bc) - 8abc.$$

Приведем в многочлене A подобные члены: $A = 4ab^2c - 7a^2bc - 8abc$. Полученная форма многочлена A есть его стандартный вид.

При другом расположении членов в многочлене A он также считается записанным в стандартном виде.

Например, $A = -8abc - 7a^2bc + 4ab^2c$ или $A = -7a^2bc - 8abc + 4ab^2c$ также стандартный вид этого многочлена.

В многочлене A степень одночлена $4ab^2c$ равна 4, степень одночлена $7a^2bc$ — также 4 и степень одночлена $8abc$ равна 3. Поэтому наибольшая степень одночленов 4 и является степенью данного многочлена.

Если в многочлен входит только одна переменная, то его стандартным видом является такая форма записи, при которой одночлены располагаются в порядке убывания степеней переменной.

Пример 4

Записать в стандартном виде многочлен:

$$A = 5x^2 \cdot (3x^3) \cdot x + 3x + 2x^3 - 7 + (2x^2)^2 - 5x^3.$$

Прежде всего, в многочлене A запишем каждый одночлен в стандартном виде: $A = 15x^6 + 3x + 2x^3 - 7 + 4x^4 - 5x^3$.

Затем приведем подобные члены (они подчеркнуты):

$$A = 15x^6 + 3x - 3x^3 - 7 + 4x^4.$$

И, наконец, расположим члены в A в порядке убывания степеней x (начиная с наибольшей степени и кончая членом, который вообще не зависит от x). Тогда получим: $A = 15x^6 + 4x^4 - 3x^3 + 3x - 7$.

Это и есть стандартный вид этого многочлена.

Заметим, что другое расположение слагаемых уже не дает стандартного вида многочлена. Например, форма записи $A = 15x^6 + 4x^4 + 3x - 3x^3 - 7$ уже не является стандартным видом многочлена A , так как слагаемое $3x$ расположено ранее слагаемого $(-3x^3)$.

Также отметим, что наивысшая степень одночлена, входящего в многочлен, считается степенью многочлена. В данном примере многочлен A имеет шестую степень.

Заметим, что одночлен можно рассматривать как многочлен, состоящий из одного члена.

III. Задание на уроке

№ 616 (а); 617 (а, б, г); 618 (а, в); 619 (а); 620 (а); 622 (а); 624; 626 (а); 627 (а); 628 (а, г); 629 (а).

IV. Контрольные вопросы

- Дайте определение многочлена. Приведите примеры многочленов:
 - а) с одной переменной;
 - б) с несколькими переменными.
- Как привести многочлен к стандартному виду?
- Как определить степень многочлена?

V. Задание на дом

№ 616 (б); 617 (в, д, е); 618 (б, г); 619 (б, г); 620 (б); 622 (б); 626 (б); 627 (б); 628 (б, в, е); 629 (б).

VI. Подведение итогов урока

Уроки 64–65. Сложение и вычитание многочленов

Цель: дать понятие об операциях сложения и вычитания многочленов.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1) Дайте определение многочлена. Как привести его к стандартному виду?

2) Запишите в стандартном виде многочлен:

$$6x^2y - 3x(yx) + 2yx \cdot x - 2xy^2 + 3xy \cdot y.$$

и определите его степень. Найдите его значение при $x = -2$, $y = 3$.

3) Запишите в виде многочлена двузначное число $\overline{ab}$.

Вариант 2

1) Дайте определение многочлена. Как определить его степень?

2) Запишите в стандартном виде многочлен:

$$2ab \cdot b^2 - a \cdot 2 \cdot b^3 + 5(ab)^2 + ab \cdot b^2 - 4a \cdot (ab) \cdot b.$$

и определите его степень. Найдите его значение при $a = 2$, $b = -3$.

3) Запишите в виде многочлена трехзначное число $\overline{abc}$.

III. Изучение нового материала

Чтобы найти алгебраическую сумму многочленов, нужно раскрыть скобки и привести подобные члены. При этом, если перед скобкой стоит знак «+», то знаки слагаемых, стоящих в скобках, не меняются. Если перед скобкой стоит знак «-», то знаки слагаемых внутри скобок меняются на противоположные.

Пример 1

Найдем сумму многочленов $A = 6a^2 + 3ab - 2b^2$ и $B = -3a^2 - 5ab + 4b^2$. Составим сумму этих многочленов, учитывая правила, раскроем скобки и приведем подобные члены. Получаем:

$$\begin{aligned} A + B &= (6a^2 + 3ab - 2b^2) + (-3a^2 - 5ab + 4b^2) = \\ &= 6a^2 + 3ab - 2b^2 - 3a^2 - 5ab + 4b^2 = (6a^2 - 3a^2) + (3ab - 5ab) + (-2b^2 + 4b^2) = \\ &= 3a^2 - 2ab + 2b^2. \end{aligned}$$

Результатом сложения многочленов A и B также является многочлен $3a^2 - 2ab + 2b^2$.

Пример 2

Найдем разность многочленов A и B из примера 1. Составим разность этих многочленов, учитывая правила, раскроем скобки и приведем подобные члены. Получаем: $A - B = (6a^2 + 3ab - 2b^2) - (-3a^2 - 5ab + 4b^2) =$

$$\begin{aligned} &= 6a^2 + 3ab - 2b^2 + 3a^2 + 5ab - 4b^2 = (6a^2 + 3a^2) + (3ab + 5ab) + (-2b^2 - 4b^2) = \\ &= 9a^2 + 8ab - 6b^2. \end{aligned}$$

Результатом вычитания многочленов A и B также является многочлен $9a^2 + 8ab - 6b^2$.

Разумеется, можно складывать и вычитать любое количество многочленов.

Пример 3

Найти многочлен $A+B+C$, если $A=a^2-b^2+2ab$, $B=2a^2-3ab-4b^2$, $C=4a^2-3ab-7b^2$.

Получаем:

$$\begin{aligned} A+B+C &= (a^2-b^2+2ab) + (2a^2-3ab-4b^2) - (4a^2-3ab-7b^2) = \\ &= a^2-b^2+2ab+2a^2-3ab-4b^2-4a^2+3ab+7b^2. \end{aligned}$$

Сгруппируем в полученном многочлене подобные члены, а затем приведем их:

$$\begin{aligned} A+B+C &= (a^2+2a^2-4a^2) + (-b^2-4b^2+7b^2) + (2ab-3ab+3ab) = \\ &= -a^2+2b^2+2ab. \end{aligned}$$

При сложении и вычитании многочленов также получается многочлен.

Иногда требуется решить обратную задачу – представить данный многочлен в виде суммы или разности многочленов. При этом пользуются правилом (правилом раскрытия скобок):

1. Если перед скобками ставится знак «+», то члены, которые заключаются в скобки, записываются с теми же знаками;
2. Если перед скобками ставится знак «-», то члены, которые заключаются в скобки, записываются с противоположными знаками.

Пример 4

Пусть дан многочлен $A=2a^2-3ab+4b^2$. Запишем его в виде суммы и разности двух многочленов.

а) $A=2a^2-3ab+4b^2=2a^2+(-3ab+4b^2)$. Данный многочлен A представлен в виде суммы многочленов $2a^2$ и $-3ab+4b^2$.

б) $A=2a^2-3ab+4b^2=2a^2-(3ab-4b^2)$. Данный многочлен A представлен в виде разности многочленов $2a^2$ и $3ab-4b^2$.

Очевидно, что такое представление не единственно. Например, многочлен A можно записать в виде суммы двух многочленов и другими способами:

$$A=(2a^2-3ab)+4b^2$$

$$\text{или } A=(a^2-3ab)+(a^2+4b^2),$$

$$\text{или } A=(3a^2-ab)+(-a^2-2ab+4b^2) \text{ и т. д.}$$

IV. Задание на уроке

№ 636; 637 (б); 641 (а); 642 (а); 644 (а); 646 (а); 649; 652 (а); 654 (а, г); 656 (а); 657 (а).

V. Контрольные вопросы

- Расскажите о правилах раскрытия скобок.
- Как складываются и вычитаются многочлены?
- Что является суммой разности многочленов?
- Как представить многочлен в виде суммы или разности многочленов? Поясните на примерах.

VI. Задание на дом

№ 635; 637 (д); 641 (б); 642 (б); 644 (г); 647 (а); 648; 652 (б); 654 (б, е); 656 (б); 658.

VII. Подведение итогов урока**§ 10. Произведение одночлена на многочлен****Уроки 66–67. Умножение одночлена на многочлен**

Цель: ознакомить с понятием многочлена и его записью в стандартном виде, понятием степени многочлена.

Ход урока**I. Сообщение темы и целей урока****II. Повторение и закрепление пройденного материала**

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

- 1) Упростите выражение $3x^2y - (2x^2y - xy) + (xy - yx^2)$ и найдите его значение при $xy = -3$.
- 2) Докажите, что значение выражения $6a^2b^2 + (3ab^2 - 2a^2b^2) - (4a^2b^2 + ab^2) - 2ab^2$ не зависит от значений переменных a и b .
- 3) Какой остаток при делении на 4 даст сумма четырех последовательных натуральных чисел?

Вариант 2

- 1) Упростите выражение $5xy^2 - (3xy^2 + xy) + (4xy - 2y^2x)$ и найдите его значение при $xy = -4$.
- 2) Докажите, что значение выражения

$5ab^2 + (3ab^2 + 3a^2b) - (2a^2b - 3ab^2) + a^2b$ не зависит от значений переменных a и b .

3) Какой остаток при делении на 5 дает сумма пяти последовательных натуральных чисел?

III. Изучение нового материала

Чтобы умножить многочлен и одночлен, нужно каждый член многочлена умножить на этот одночлен и полученные произведения алгебраически сложить.

Пример 1

Умножить многочлен $A = 3a^2 - 2ab + b^2$ на одночлен $B = -2ab$.

Имеем: $A \cdot B = (3a^2 - 2ab + b^2) \cdot (-2ab) = 3a^2 \cdot (-2ab) - 2ab \cdot (-2ab) + b^2 \cdot (-2ab) = 6a^2b + 4a^2b^2 - 2ab^3$.

Заметим, что если многочлен имеет стандартный вид, то в результате такого умножения также получается многочлен стандартного вида, который уже не нуждается в приведении подобных членов.

Пример 2

Умножим одночлен $A = -2a^2$ и многочлен $B = 7a^3 + 3a - 4$.

Получаем: $A \cdot B = -2a^2 \cdot (7a^3 - 5a^2 + 3a - 4) = -2a^2 \cdot 7a^3 - 2a^2 \cdot (-5a^2) - 2a^2 \cdot 3a - 2a^2 \cdot (-4) = -14a^5 + 10a^4 - 6a^3 + 8a^2$.

Полученный многочлен имеет стандартный вид. Заметим, что промежуточные результаты можно не записывать. Тогда запись такого умножения выглядит короче:

$A \cdot B = -2a^2 \cdot (7a^3 - 5a^2 + 3a - 4) = -14a^5 + 10a^4 - 6a^3 + 8a^2$.

Разумеется, многочлен можно умножить и на несколько одночленов. Сделать это можно двумя способами:

1) Умножить многочлен сначала на первый одночлен. В результате получается новый многочлен, который затем умножается на второй одночлен и т. д.

2) Перемножить все одночлены. В результате получается новый одночлен, который затем умножается на данный многочлен.

Пример 3

Умножим многочлен $A = 3a^2 - 2ab + 5b^2$ на одночлен $B = 2a^2$ и $C = ab$.

Сделаем эту задачу двумя перечисленными способами.

1 способ

Умножим многочлен A и одночлен B . Получаем новый многочлен:

$D = A \cdot B = (3a^2 - 2ab + 5b^2) \cdot 2a^2 = 6a^4 - 4a^3b + 10a^2b^2$.

Теперь умножим многочлен В и одночлен С. Получаем окончательный ответ – многочлен:

$$F = D \cdot C = (6a^4 - 4a^3b + 10a^2b^2) \cdot ab = 6a^5b - 4a^4b^2 + 10a^3b^3.$$

2 способ

Перемножим одночлены В и С. Получаем новый одночлен:

$$E = B \cdot C = 2a^2 \cdot ab = 2a^3b.$$

Теперь умножим данный многочлен А на новый одночлен Е. Получаем окончательный ответ – многочлен:

$$F = A \cdot E = (3a^2 - 2ab + 5b^2) \cdot 2a^3b = 6a^5b - 4a^4b^2 + 10a^3b^3.$$

Разумеется, ответы совпадают в соответствии с сочетательным свойством умножения $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

Однако даже при двух одночленах второй способ решения является более простым.

IV. Задание на уроке

№ 663 (а, в); 664 (б); 665 (а, б); 666 (а, г); 667 (б); 668 (а, в); 669 (а, б, г); 670 (а, в); 672 (а).

V. Контрольные вопросы

- Как умножить одночлен на многочлен? Приведите примеры.
- Какое свойство умножения используется при умножении одночлена и многочлена?

VI. Задание на дом

№ 663 (б, г); 664 (д); 665 (в, г); 666 (д, е); 667 (г); 668 (б, г); 669 (в, с, з); 670 (б, г); 672 (б).

VII. Подведение итогов урока

Уроки 68–69. Использование умножения одночлена и многочлена при преобразовании алгебраических выражений и решении уравнений

Цель: рассмотреть практическое применение операции умножения одночлена и многочлена.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1) Выполните умножение:

а) $-3x^2y(2x - y + y^2)$; б) $2xy(3x - 2y^2 + 3xy) \cdot (-3x^2)$.

2) Упростите выражение $2(3x^2 - 5x + 1) - 3(2x^2 - 4x + 3)$ и вычислите его значение при $x = -2$.3) Представьте выражение $3y(2y - x) - 2y^2(x + y^2)$ в виде многочлена и определите его степень.**Вариант 2**

1) Выполните умножение:

а) $-2xy^2(2y - 3x + x^2)$; б) $3xy(2x - 3x^2 + 4xy) \cdot (-2y^2)$.

2) Упростите выражение $4(x^2 - 3x + 2) - 2(2x^2 - 5x + 1)$ и вычислите его значение при $x = -3$.3) Представьте выражение $2xy(x - y) - 3x^2(x + y^2)$ в виде многочлена и определите его степень.**III. Изучение нового материала**

Навыки умножения одночлена и многочлена используются при преобразовании выражений и решении уравнений.

Пример 1Упростим выражение $A = a(a + b - c) - b(a - b - c) + c(a - b + c)$ и вычислим его значение при $a = 1, b = 2, c = 3$.

$$\begin{aligned} \text{Получаем: } A &= a(a + b - c) - b(a - b - c) + c(a - b + c) = \\ &= a^2 + ab - ac - ba + b^2 + bc + ca - cb + c^2 = a^2 + b^2 + c^2. \end{aligned}$$

Было учтено переместительное свойство умножения: $ba = ab$, $ca = ac$ и $cb = bc$. Найдём значение выражения:

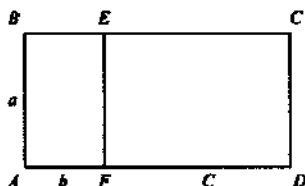
$$A = a^2 + b^2 + c^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14.$$

Пример 2Докажем, что выражение $A = 2a^2(a + b) - 3b(a^2 + b) + a^2(b - 2a) + 3b^2$ принимает одно и то же значение при любых значениях переменных a и b .

Раскроем скобки и получаем:

$$A = 2a^3 + 2a^2b - 3ba^2 - 3b^2 + a^2b - 2a^3 + 3b^2 = 0.$$

Вновь было учтено переместительное свойство умножения: $a^2b = ab^2$.**Пример 3**На простейшем примере обоснуем геометрически правило умножения одночлена и многочлена, т. е. распределительный закон $a(b + c) = ab + ac$.



Рассмотрим прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=a$ и $AD=b+c$. Его площадь $S_{ABCD} = AB \cdot AD = a(b+c)$. Этот прямоугольник $ABCD$ состоит из прямоугольников: $ABEF$ со сторонами $AB=a$ и $AF=b$ и площадью $S_{ABEF} = AB \cdot AF = a \cdot b$ и $FECD$ со сторонами $EF=a$ и $FD=c$ и площадью $S_{FECD} = EF \cdot FD = a \cdot c$. Очевидно, что $S_{ABCD} = S_{ABEF} + S_{FECD}$ или $a(b+c) = ab + ac$.

Пример 4

Решим уравнение $2x(x+3) - x(2x+4) = 6 - x$.

Умножим одночлены на многочлены (т. е. раскроем скобки) и приведем подобные члены. Получаем: $2x^2 + 6x - 2x^2 - 4x = 6 - x$ или $2x = 6 - x$, откуда $x = 2$.

Пример 5

Решим уравнение $\frac{2x-7}{12} - \frac{4x+3}{18} = \frac{5x-6}{9}$.

Умножим все члены уравнения на наименьшее общее кратное чисел 12, 18, 9, т. е. НОК (12, 18, 9) = 36 и получим:

$$\frac{2x-7}{12} \cdot 36 - \frac{4x+3}{18} \cdot 36 = \frac{5x-6}{9} \cdot 36;$$

$$\text{или } (2x-7) \cdot 3 - (4x+3) \cdot 2 = (5x-6) \cdot 4;$$

$$\text{или } 6x - 21 - 8x - 6 = 20x - 24.$$

В левой части уравнения приведем подобные члены:

$$-2x - 27 = 20x - 24 \text{ или } -3 = 22x, \text{ откуда } x = -\frac{3}{22}.$$

Пример 6

Решим уравнение $\frac{3x-8}{4} - \frac{2x-6}{3} = \frac{x}{12}$.

Умножим все члены уравнения на наименьшее общее кратное чисел 4, 3, 12, т. е. на число 12. Получаем: $\frac{3x-8}{4} \cdot 12 - \frac{2x-6}{3} \cdot 12 = \frac{x}{12} \cdot 12;$

$$\text{или } (3x-8) \cdot 3 - (2x-6) \cdot 4 = x;$$

$$\text{или } 9x - 24 - 8x + 24 = x;$$

$$\text{или } x = x.$$

Таким образом, получим тождество $x = x$. Это означает, что решением данного уравнения является любое число x .

Разумеется, к уравнениям и дальнейшему их решению приводят и текстовые задачи.

Пример 7

В первый день завод выпустил на 8 тонн продукции больше, чем во второй. В третий день завод выпустил в 1,5 раза больше, чем в первые два дня. Оказалось, что за эти три дня было выпущено 220 тонн продукции. Сколько тонн продукции выпускалось каждый день?

По условиям задачи в таблице приведен выпуск продукции заводом в каждый день. В качестве неизвестной x введено количество продукции (в тоннах), выпущенной заводом во второй день. Остальные столбцы таблицы с очевидностью получаются из условий задачи.

День	1	2	1 + 2	3
Выпуск продукции	$x + 8x$	x	$x + 8 + x$	$1,5x(x + 8 + x)$

Теперь, исходя из условий задачи, посчитываем общий выпуск продукции за три дня, используя данные таблицы. Получаем уравнение: $x + 8 + x + 1,5(x + 8 + x) = 220$ или $2x + 8 + 1,5(2x + 8x) = 220$, или $2x + 8 + 3x + 12 = 200$, или $5x + 20 = 220$, или $5x = 200$, откуда $x = 40$.

Учитывая таблицу, легко посчитать выпуск продукции в каждый день:

$$\text{в первый день: } x + 8 = 40 + 8 = 48;$$

$$\text{во второй день: } x = 40;$$

$$\text{в третий день: } 1,5(x + 8 + x) = 1,5(2x + 8) = 3x + 12 = 3 \cdot 40 + 12 = 132.$$

(*Ответ:* было выпущено: в первый день – 48 тонн; во второй день – 40 тонн; в третий день – 132 тонны.)

IV. Задание на уроке

№ 675; 677 (а); 679 (а, г); 681 (а); 682 (а, в); 683 (а, г); 684 (а); 686 (б); 688; 693; 696.

V. Задание на дом

№ 676; 677 (б); 679 (е, з); 681 (в); 682 (б, г); 683 (б, ж); 684 (г); 686 (г); 689; 694; 697.

VI. Подведение итогов урока

Уроки 70–71. Вынесение общего множителя за скобки

Цель: обучить навыкам разложения многочленов на множители.

Ход урока**I. Сообщение темы и целей урока****II. Повторение и закрепление пройденного материала**

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1**1) Решите уравнение:**

а) $\frac{2x-3}{5} - \frac{5x-4}{9} = \frac{4x+3}{15};$

б) $\frac{6x-4}{7} + \frac{2}{x-3} = \frac{2(3x-2)}{7} + \frac{2}{x-3}.$

- 2) Поезд уменьшил скорость с 80 км/ч до 60 км/ч. В результате затратил на путь между городами на 30 минут больше. Найти расстояние между городами.

Вариант 2**1) Решите уравнение:**

а) $\frac{5x-2}{4} - \frac{2x-4}{3} = \frac{x+3}{6};$

б) $\frac{10x-5}{3} - \frac{3}{x-1} = \frac{5(2x-1)}{3} - \frac{3}{x-1}.$

- 2) Поезд увеличил скорость с 50 км/ч до 75 км/ч. В результате затратил на путь между городами на 40 минут меньше. Найти расстояние между городами.

III. Изучение нового материала

При алгебраических преобразованиях, решении уравнений, действиях с алгебраическими дробями бывает полезным представление многочлена в виде произведения других многочленов (некоторые такие многочлены могут быть и одночленами). Такое представление многочлена называется разложением многочлена на множители.

Разложение многочлена на множители основано на распределительном свойстве $ab + ac = a(b + c)$. При этом общий множитель a в членах ab и ac многочлена выносят за скобки. Поэтому такой способ разложения многочлена называют вынесением общего множителя за скобки.

Пример 1

Разложим на множители многочлен $A = 9a^3b^2 - 21a^2b^3$. Легко заме-

тить, что члены $9a^3b^2$ и $21a^2b^3$ многочлена A имеют наибольший общий множитель $3a^2b^2$. Поэтому их можно записать в виде:

$$9a^3b^2 = 3a^2b^2 \cdot 3a \text{ и } 21a^2b^3 = 3a^2b^2 \cdot 7b.$$

Тогда данный многочлен имеет вид: $A = 3a^2b^2 \cdot 3a - 3a^2b^2 \cdot 7b$.

Используя распределительное свойство, вынесем общий множитель $3a^2b^2$ за скобки и получим $A = 3a^2b^2 \cdot (3a - 7b)$. Таким образом, данный многочлен A разложен на произведение одночлена $3a^2b^2$ и многочлена $3a - 7b$.

Заметим, что легко проверить правильность разложения на множители. Для этого надо выполнить обратное действие — умножить одночлен $3a^2b^2$ и многочлен $3a - 7b$. Получаем:

$$3a^2b^2(3a - 7b) = 3a^2b^2 \cdot 3a - 3a^2b^2 \cdot 7b = 9a^3b^2 - 21a^2b^3 = A.$$

Так как в результате умножения вновь получен многочлен A , то его разложение на множители выполнено правильно.

Пример 2

Разложим на множители многочлен $A = 21a^3b^2 + 28a^2b^3 - 14ab$.

Легко заметить, что каждый член многочлена A имеет множителем одночлен $7ab$. Поэтому многочлен A можно записать в виде:

$A = 7ab \cdot 3a^2b + 7ab \cdot 4ab^2 - 7ab \cdot 2$. Теперь этот общий множитель $7ab$ можно вынести за скобки: $A = 7ab(3a^2b + 4ab^2 - 2)$.

Таким образом, многочлен A разложен на произведение одночлена $7ab$ и многочлена $3a^2b + 4ab^2 - 2$.

Правильность разложения на множители легко проверить.

Если умножить множители многочлена, то получится данный многочлен: $7ab(3a^2b + 4ab^2 - 2) = 7ab \cdot 3a^2b + 7ab \cdot 4ab^2 + 7ab \cdot (-2) = 21a^3b^2 + 28a^2b^3 - 14ab$.

Пример 3

Разложим на множители многочлен $A = 2a^2b \cdot (2a + 3b) + 3c \cdot (2a + 3b)$.

Вынесем общий множитель $(2a + 3b)$ за скобки и получаем:

$$A = (2a + 3b)(2a^2b + 3c).$$

Итак, многочлен A разложен на произведение двух многочленов $(2a + 3b)$ и $(2a^2b + 3c)$.

Правильность разложения легко проверить умножением сомножителей: $(2a + 3b)(2a^2b + 3c) = (2a + 3b) \cdot 2a^2b + (2a + 3b) \cdot 3c$, т. е. получим данный многочлен.

Пример 4

Разложим на множители многочлен $A = 7a^2(a-3b) + (3b-a)$.

Слагаемые в выражении A имеют множители $a-3b$ и $3b-a$, которые отличаются друг от друга только знаком. Поэтому в многочлене $3b-a$ выносим число -1 за скобки. Получаем: $A = 7a^2(a-3b) + b \cdot (-1)(a-3b) = 7a^2(a-3b) - b(a-3b) = (a-3b)(7a^2 - b)$.

Таким образом, данный многочлен A разложен на произведение многочленов $a-3b$ и $7a^2 - b$.

Заметим, что преобразование $b(3b-a) = -b(a-3b)$ можно объяснить и иначе: если изменить знак у второго множителя и перед произведением, то значение выражения не изменится.

Способ разложения на множители часто используется при решении уравнений и в задачах на делимость чисел.

Пример 5

Решим уравнение $3x^2 - 2x = 0$.

Разложим левую часть уравнения на множители. Для этого выносим общий множитель x за скобки. Получаем: $x(3x-2) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю. Имеем: $x = 0$ или $3x - 2 = 0$ (корень этого линейного уравнения $x = \frac{2}{3}$).

Итак, данное уравнение имеет два корня $x = 0$ и $x = \frac{2}{3}$.

Пример 6

Докажем, что выражение $4^6 + 4^8 - 7 \cdot 4^5$ делится на 61.

Вынесем в выражении $4^6 + 4^8 - 7 \cdot 4^5$ общий множитель 4^5 за скобки и получим: $4^6 + 4^8 - 7 \cdot 4^5 = 4^5(4 + 64 - 7) = 4^5 \cdot 61$. Данное выражение представлено в виде произведения двух чисел, одно из которых равно 61. Поэтому данное выражение делится на 61.

IV. Задание на уроке

№ 702 (а, г); 705 (б, з); 708 (б); 710 (в); 711 (а, в); 712 (б); 713 (б); 715 (в); 716 (б); 718 (б, д); 719 (б); 720 (б, д).

V. Контрольные вопросы

- Какое преобразование называется разложением многочлена на множители? Приведите примеры.
- На каком свойстве основано вынесение общего множителя за скобки?
- Как выносятся общий множитель за скобки? Поясните на примере.

VI. Задание на дом

№ 702 (б, в); 705 (а, е); 708 (а, в); 710 (г, е); 711 (б, г); 712 (а, в); 713 (а, в); 715 (а); 718 (а, в); 719 (а); 720 (а, в).

VII. Подведение итогов урока

**Уроки 72–73. Контрольная работа № 5
по теме «Сумма и разность многочленов.
Произведение одночлена и многочлена»**

Контрольная работа составлена в шести вариантах (варианты 1, 2 – самые простые; 3, 4 – средней сложности; варианты 5, 6 – самые сложные). Степень сложности меняется не слишком резко, поэтому можно рекомендовать следующий критерий оценки: при решении вариантов 1, 2 оценка 3 ставится за любые три решенные задачи, оценка 4 – за четыре задачи и оценка 5 – за пять задач. Одна задача дает школьникам некоторую свободу выбора. При тех же критериях оценки за решение вариантов 3, 4 добавляется к набранным баллам дополнительно 0,5 балла; за решение вариантов 5, 6 – дополнительно 1,0 балла (то есть оценка 5 ставится уже за 4 задачи). Все задачи в варианте примерно равноценны. Может быть несколько тяжелее задачи 5, 6.

Перед проведением контрольной работы учащихся целесообразно ознакомить с критериями оценки и разной сложностью вариантов. Выбор вариантов может быть осуществлен учителем или предоставлен учащимся (в этом случае предполагается наличие копировальной техники в школе и избыточное количество заданий работы). После урока-разбора контрольной решение всех задач шести вариантов может быть вывешено на стенде. Разумеется, разобрать такое количество задач на уроке невозможно (да и не нужно).

Вариант 1

1) Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида и определите его степень:

а) $2a^2 + 3a - 5b + 7ab - 2a - a + 4b - 5ab - a^2 - 2ab$;

б) $2a(3a + 4b) - 5b(a + b) - 5a^2 - 3ab + 6b^2$.

2) Вынесите общий множитель за скобки:

а) $3a^3 - 12a^2 + 6a$;

б) $15x^4y^3 - 5x^2y^2 + 10x^2y$.

3) Решите уравнение $\frac{x+3}{4} = \frac{2x-7}{5}$.

4) Туристы прошли некоторое расстояние со скоростью 5 км/ч. и такой же расстояние проплыли на плоту со скоростью 2 км/ч. На весь этот путь было потрачено 7 часов. Какой путь преодолели туристы пешком и на плоту?

Вариант 2

1) Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида и определите его степень:

а) $3a^2 + 7b - 3a + 5ab + 2a + a + 3b^2 - 6b - 3ab - 3b^2 - 2ab$;

б) $3a(4a + 3b) - 9b(a - b) - 12a^2 - 8b^2 + 2ab$.

2) Вынесите общий множитель за скобки:

а) $4b^3 + 8b^2 - 12b$;

б) $12x^2y^4 - 8x^2y^3 + 4x^2y$.

3) Решите уравнение $\frac{x-2}{3} = \frac{3x+1}{7}$.

4) Туристы прошли некоторое расстояние со скоростью 4 км/ч и такое же расстояние проплыли на лодке со скоростью 6 км/ч. На весь этот путь было потрачено 5 часов. Какой путь преодолели туристы пешком и на плоту?

Вариант 3

1) Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида и определите его степень: $\left(3\frac{2}{3}x^2y\right)\left(\frac{9}{11}xy^3\right) - 3x^2y^2(xy^2 + xy) + 2x^3y^3$.

2) Упростите выражение $2xy(x+y) - 3x^2y - xy^2$ и найдите его значение при $x = \frac{1}{2}$ и $y = \frac{3}{2}$.

3) Разложите на множители выражение $6xy(2x-y) + 5y(y-2x)$.

4) Решите уравнение $5x^2 + 0,2x = 0$.

5) Докажите, что число $5^3 + 3 \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^5$ кратно 66.

6) Поезд проходит расстояние между городами за 8 часов. Если он увеличит скорость на 20 км/ч, то пройдет это расстояние за 6 часов. Найдите скорость поезда и расстояние между городами.

Вариант 4

1) Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида и определите его степень: $\left(5\frac{1}{3}xy\right)\left(\frac{3}{8}x^3y^2\right) - 2x^2y^2(x^2y - xy) + x^3y^3$.

2) Упростите выражение $3x^2(x-y) - 2x^3 + 4x^2y$ и найдите его значение при $x = \frac{3}{2}$ и $y = \frac{1}{2}$.

3) Разложите на множители выражение $3xy(x-2y) + 2x(2y-x)$.

4) Решите уравнение $3x^2 + 0,6x = 0$.

5) Докажите, что число $4^3 + 8 \cdot 4^4 + 3 \cdot 4^5$ кратно 81.

6) Поезд проходит расстояние между городами за 9 часов. Если он увеличит скорость на 20 км/ч, то пройдет это расстояние за 7 часов. Найти скорость поезда и расстояние между городами.

Вариант 5

1) Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида и определите его степень и найдите значение при $xy = 5$:

$$(27xy^2) \cdot \left(\frac{1}{3}xy\right)^2 - 3x^2y(xy^3 - xy^2) - 2(xy)^3.$$

2) Разложите выражение на множители $4a^2b(2a - 3b) + 3ab - 2a^2$.

3) Решите уравнения:

$$\text{а) } 3x + 2x^3 + 5x^5 = 0; \quad \text{б) } \frac{6x+7}{7} - 2 = \frac{3-5x}{14}.$$

4) Докажите, что число $11 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^5 + 3^7$ кратно 53.

5) Знаменатель данной дроби на 5 больше ее числителя. Если ее числитель увеличить на 3, а знаменатель на 1, то получится дробь $\frac{2}{3}$. Найдите данную дробь.

Вариант 6

1) Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида и определите его степень и найдите значение при $xy = 3$:

$$(64x^2y) \cdot \left(\frac{1}{4}xy\right)^2 - 4xy^2(x^3y - x^2y) + 5(xy)^3.$$

2) Разложите выражение на множители $3ab^2(4a - b) - 20ab + 5b^2$.

3) Решите уравнения:

$$\text{а) } 7x + 4x^3 + 3x^5 = 0; \quad \text{б) } \frac{x-4}{5} + 1 = \frac{2x+4}{9}.$$

4) Докажите, что число $13 \cdot 4^5 + 3 \cdot 4^6 + 4^8$ кратно 89.

5) Знаменатель данной дроби на 4 больше ее числителя. Если ее числитель и знаменатель увеличить на 1, то получится дробь $\frac{1}{2}$. Найдите данную дробь.

Урок 74. Анализ контрольной работы

Ход урока

I. Подведение итогов контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Данные удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи/Итоги	1	2	3	...	6
+	5				
±	1				
-	1				
∅	1				

Обозначения:

+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными погрешностями;

– – число не решивших задачу;

∅ – число не решавших задачу.

Варианты 1, 2 – 8 учащихся.

2. Типичные ошибки при решении задач.

3. Задачи, вызвавшие наибольшие трудности, и их разбор (учителем или школьниками, решившими эту задачу).

II. Разбор задач вариантов

Вариант I

1)

а) $a^2 - b$ (вторая степень); б) $a^2 - b$ (вторая степень);

2)

а) $3a(a^2 - 4a + 2)$; б) $5x^2y(3x^2y^2 - y + 2)$.

3) $x = 14\frac{1}{3}$;

4) 10 км пешком и 10 км на плоту.

Вариант II

1)

а) $3a^2 + b$ (вторая степень); б) $b^2 + 2ab$ (вторая степень);

2)

а) $4b(b^2 + 2b - 3)$; б) $4x^2y(3xy^3 - 2y^2 + 1)$.

3) $x = -8,5$.

4) 12 км пешком и 12 км на лодке.

Вариант III

1) $-x^3y^3$ (шестая степень);

2) $\frac{3}{4}$.

3) $y(2x - y)(6x - 5)$.

4) $x_1 = 0$, $x_2 = 0,04$.

5) 60 км/ч и 480 км.

Вариант IV

1) $3x^3y^3$ (шестая степень).2) $\frac{9}{2}$.3) $x(x-2y)(3y-2)$.4) $x_1 = 0, x_2 = -0,2$.

5) 70 км/ч и 630 км.

Вариант V (решение)

1) Выполним указанные действия:

$$27xy^2 \cdot \frac{1}{9}x^2y^2 - 3x^3y^4 + 3x^3y^3 - 2x^2y^3 = 3x^3y^4 - 3x^3y^4 + x^3y^3 = \\ = x^3y^3 = (xy)^3.$$

Учтены правила действий с числами с натуральными степенями. Многочлен (который в данном случае является одночленом) x^3y^3 имеет шестую степень. Значение этого многочлена при $xy = 5$ равно $5^3 = 125$.

(Ответ: x^3y^3 , шестая степень, 125.)

2) В данном выражении из двух последних членов вынесем за скобки общий множитель $(-a)$ и получим: $4a^2b(2a-3b) - a(2a-3b) = \\ = (2a-3b)(4a^2b-a) = (2a-3b) \cdot a(4ab-1) = a(2a-3b)(4ab-1).$

(Ответ: $a(2a-3b)(4ab-1)$.)

3) а) Разложим левую часть уравнения на множители, вынеся x за скобки. Получаем $x(3+2x^2+5x^4) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Первый множитель равен нулю при $x = 0$. Второй множитель $3+2x^2+5x^4 \neq 0$ при всех x , так как $x^2 \geq 0$ и $x^4 \geq 0$.

(Ответ: $x = 0$.)

б) Умножим все члены уравнения на число 14 и получим:

$$\frac{6x+7}{7} \cdot 14 - 2 \cdot 14 = \frac{3-5x}{14} \cdot 14; \text{ или } (6x+7) \cdot 2 - 28 = 3-5x;$$

или $12x+14-28=3-5x$; или $17x=17$, откуда $x=1$.(Ответ: $x=1$.)4) Вынесем за скобки общий множитель 3^4 и получим:

$$11 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^5 + 3^7 = 3^4(11 + 5 \cdot 3 + 3^3) = 3^4(11 + 15 + 27) = 3^4 \cdot 53.$$

Так как число имеет множитель 53, то оно и кратно 53.

(Ответ: доказано.)

5) Пусть числитель дроби равен x , знаменатель равен $(x+5)$, т. е. дробь имеет вид $\frac{x}{x+5}$. После того, как ее числитель увеличили на 3, а знаменатель на 1, получили дробь $\frac{x+3}{x+6}$, которая равна $\frac{2}{3}$. Имеем уравнение: $\frac{x+3}{x+6} = \frac{2}{3}$ или $3(x+3) = 2(x+6)$, или $3x+9 = 2x+12$, откуда $x = 3$

Поэтому данная дробь $\frac{x}{x+5}$ равна $\frac{3}{3+5} = \frac{3}{8}$.

(Ответ: $\frac{3}{8}$.)

Вариант VI (решение)

1) Выполним указанные действия:

$$64x^2y \cdot \frac{1}{16}x^2y^3 - 4x^3y^3 + 5x^3y^3 = 4x^4y^3 - 4x^4y^3 + x^3y^3 = x^3y^3 = (xy)^3.$$

Учтены правила действий с числами с натуральными степенями. Многочлен (который в данном случае является одночленом) x^3y^3 имеет шестую степень. Значение этого многочлена при $xy = 3$ равно $3^3 = 27$.

(Ответ: x^3y^3 , шестая степень, 27.)

2) В данном выражении из двух последних членов вынесем за скобки общий множитель $(-5b)$ и получим: $3ab^2(4a-b) - 5b(4a-b) = (4a-b)(3ab^2 - 5b) = (4a-b) \cdot b(3ab - 5) = b(4a-b)(3ab - 5)$.

(Ответ: $b(4a-b)(3ab-5)$.)

3) а) Разложим левую часть уравнения на множители, вынеся x за скобки. Получаем $x(7+4x^2+3x^4) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Первый множитель равен нулю при $x = 0$. Второй множитель $7+4x^2+3x^4 \neq 0$ при всех x , так как $x^2 \geq 0$ и $x^4 \geq 0$.

(Ответ: $x = 0$.)

б) Умножим все члены уравнения на число 45 и получим:

$$\frac{x-4}{5} \cdot 45 + 1 \cdot 45 = \frac{2x+4}{9} \cdot 45; \text{ или } (x-4) \cdot 9 + 45 = (2x+4) \cdot 5;$$

или $9x - 36 + 45 = 10x + 20$, откуда $x = -11$.

(Ответ: $x = -11$.)

4) Вынесем за скобки общий множитель 4^5 и получим:

$$13 \cdot 4^5 + 3 \cdot 4^5 + 4^8 = 4^5(13 + 3 \cdot 4 + 4^3) = 4^5(13 + 12 + 64) = 4^5 \cdot 89.$$

Так как число имеет множитель 89, то оно и кратно 89.

(Ответ: доказано.)

5) Пусть числитель дроби равен x , знаменатель равен $(x+4)$, т. е. дробь имеет вид $\frac{x}{x+4}$. После того, как ее числитель и знаменатель увеличили на 1, получили дробь $\frac{x+1}{x+5}$, которая равна $\frac{1}{2}$. Имеем уравнение:

$\frac{x+1}{x+5} = \frac{1}{2}$ или $2(x+1) = x+5$, или $2x+2 = x+5$, откуда $x=3$.

Поэтому данная дробь $\frac{x}{x+4}$ равна $\frac{3}{3+4} = \frac{3}{7}$.

(Ответ: $\frac{3}{7}$.)

§ 11. Произведение многочленов

Уроки 75–76. Умножение многочлена на многочлен

Цель: отработать навыки умножения многочленов.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Изучение нового материала

Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно умножить каждый член одного многочлена на каждый член другого многочлена и полученные произведения алгебраически сложить.

Пример 1

Умножить многочлены $A=3a-2b$ и $B=2a+3b$.

Выполним умножение поэтапно: умножим каждый член, входящий в A , на многочлен B , а затем умножим одночлены на многочлен (в соответствии с предыдущим пунктом). Тогда получаем:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (3a-2b) \cdot (2a+3b) = 3a(2a+3b) - 2b(2a+3b) = \\ &= 6a^2 + 9ab - 4ba - 6b^2. \end{aligned}$$

Теперь осталось только привести подобные члены:

$$A \cdot B = 6a^2 + 5ab - 6b^2 \text{ (здесь учтено, что } ba = ab \text{)}.$$

Заметим, что результатом умножения многочленов также является многочлен. При этом если один множитель состоял из m членов, а

второй — из n членов, то в произведении (до приведения подобных членов) будет $m \cdot n$ членов. Этим соображением можно пользоваться для контроля преобразований. В рассмотренном примере многочлены A и B состояли из двух членов. Поэтому в многочлене $A \cdot B = 6a^2 + 9ab - 4ba - 6b^2$ имеется $2 \cdot 4$ члена.

В случае «несколько многочленов» умножение выполняется поочередно, при этом после очередного умножения приводятся подобные члены.

Пример 2

Умножим многочлены $A = a - 2b$, $B = 2a + 3b$, $C = 3a + b$.

Умножим сначала многочлены A и B :

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (a - 2b)(2a + 3b) = a \cdot (2a + 3b) - 2b(2a + 3b) = \\ &= 2a^2 + 3ab - 4ba - 6b^2 = 2a^2 - ab - 6b^2. \end{aligned}$$

Теперь полученный многочлен умножим на C :

$$\begin{aligned} (A \cdot B) \cdot C &= (2a^2 - ab - 6b^2)(3a + b) = (2a^2 - ab - 6b^2) \cdot 3a + \\ &+ (2a^2 - ab - 6b^2) \cdot b = 6a^3 - 3a^2b - 18ab^2 + 2a^2b - ab^2 - 6b^3 = \\ &= 6a^3 - a^2b - 19ab^2 - 6b^3. \end{aligned}$$

Умножение многочленов используется в преобразованиях выражений, при решении уравнений, в задачах на делимость чисел и т. д.

Пример 3

Упростите выражение $A = (a^3 + 2b)(a^2 - 2b) - (a^2 + 2b)(a^3 - 2b)$.

Чтобы преобразовать выражение A , перемножим входящие в него многочлены и приведем подобные члены. Получаем:

$$\begin{aligned} A &= a^3 \cdot a^2 - a^3 \cdot 2b + 2b \cdot a^2 + 2b \cdot (-2b) - a^2 \cdot a^3 - a^2 \cdot (-2b) - 2b \cdot a^3 - 2b \cdot (-2b) = \\ &= a^5 - 2a^3b + 2a^2b - 4b^2 - a^5 + 2a^2b - 2a^3b + 4b^2 = -4a^3b + 4b^2 = \\ &= -4a^3b + 4a^2b = 4a^2b(1 - a). \end{aligned}$$

Пример 4

Решите уравнение $(3x + 2)(2x + 3) - (x + 4)(x - 2) = (5x + 2)(x - 1)$.

Преобразуем обе части уравнения, перемножая многочлены и приводя подобные члены. Получаем:

$$6x^2 + 9x + 4x + 6 - x^2 + 2x - 4x + 8 = 5x^2 - 5x + 2x - 2;$$

$$\text{или } 11x + 14 = -3x - 2, \text{ или } 11x + 3x = -14 - 2;$$

$$\text{или } 14x = -16, \text{ откуда } x = -\frac{16}{14} = -\frac{8}{7} = -1\frac{1}{7}.$$

Пример 5

Докажите, что при любом натуральном значении n значение выражения $A = (n + 1)(n + 2) - (3n - 1)(n + 3) + 5n(n + 2) + n + 7$ кратно 3.

Перемножим многочлены и приведем подобные члены. Имеем:

$$\begin{aligned} A &= n^2 + 2n + n + 2 - 3n^2 - 9n - n + 3 + 5n^2 + 10n + n + 7 = \\ &= 3n^2 + 6n + 3 = 3 \cdot (n^2 + 2n + 1). \end{aligned}$$

При любом натуральном n значение выражения $n^2 + 2n + 1$ является натуральным числом. Поэтому значение выражения A кратно 3 при любом натуральном значении n .

III. Задание на уроке

№ 725 (б, д); 726 (б); 728; 730 (б); 731 (а); 732 (в); 734 (а); 736 (а); 738 (б); 740 (а); 743 (а); 744 (в); 746 (а); 747; 750.

IV. Контрольные вопросы

- Как умножить многочлены? Приведите примеры.
- Какое выражение является результатом умножения многочленов?

V. Задание на дом

№ 725 (а); 727 (б); 729 (в, д); 731 (б); 732 (г); 734 (б); 736 (б); 738 (а); 739 (в); 743 (б); 745 (б); 746 (б); 748; 749.

VI. Подведение итогов урока

Урок 77. Разложение многочлена на множители способом группировки

Цель: ознакомить учащихся с еще одним способом разложения многочлена на множители.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

- 1) Как умножить многочлены?
- 2) Перемножьте многочлены:

а) $(a - 2b)(4a + 3b)$;	б) $(2ab - 3)(3a + b - 2)$.
- 3) Решите уравнение: $(2x - 3)(3x + 4) = 8 + (3x - 1)(2x + 3)$.
- 4) Докажите, что если натуральные числа m и n при делении на 3 дают в остатке 2, то их произведение mn при делении на 3 дает в остатке 1.

Вариант 2

1) Какое выражение является результатом умножения многочленов?

2) Перемножьте многочлены:

а) $(2a - b)(3a + 4b)$; б) $(3ab - 2)(2a + b - 3)$.

3) Решите уравнение: $(4x - 3)(2x + 1) = 5 + (2x - 3)(4x + 1)$.

4) Докажите, что если натуральные числа m и n при делении на 4 дают в остатке 2, то их произведение mn при делении на 4 дает в остатке 1 (т. е. кратно 4).

III. Изучение нового материала

В ряде случаев все члены многочлена не имеют общего множителя, однако, определенные группы этих членов такой множитель имеют. Этот факт может быть использован для разложения многочлена на множители.

Пример 1

Разложим на множители многочлен $A = 3ab + b^2 + 3ac + bc$.

Понятно, что если сгруппировать члены $3ab$, $3ac$ и b^2 , bc , т. е. $A = (3ab + 3ac) + (b^2 + bc)$, то в первой группе есть общий множитель $3a$, во второй группе – общий множитель b . Вынесем эти множители за скобки и получим: $A = 3a(b + c) + b(b + c)$.

Теперь видно, что есть общий множитель $(b + c)$, который также можно вынести за скобки: $A = (b + c)(3a + b)$.

Многочлен A разложен на произведение двух многочленов $(b + c)$ и $(3a + b)$.

Заметим, что члены многочлена A можно сгруппировать и по-другому. Например, $A = (3a + b^2) + (3ac + bc) = b(3a + b) + c(3a + b) = (3a + b)(b + c)$.

Разумеется, независимо от способа первоначальной группировки членов многочлена A , было получено то же самое разложение на множители: $A = (3a + b)(b + c)$.

Из примера видно, что для использования такого способа разложения необходимо: сгруппировать члены многочлена, имеющие общий множитель и вывести этот множитель за скобки.

Часто при использовании такого способа разложения некоторые члены многочлена приходится записать в виде суммы двух слагаемых.

Пример 2

Разложим на множители многочлен $A = a^2 + 9a + 20$.

Очевидно, что члены многочлена, а также различные группы членов общего множителя не имеют. Поэтому одночлен $9a$ представим в виде суммы двух членов, т. е. $9a = 4a + 5a$. Тогда данный многочлен имеет вид: $A = a^2 + 4a + 5a + 20$. Попарно сгруппируем члены, имеющие общий множитель: $A = (a^2 + 4a) + (5a + 20)$.

Слагаемые в первой скобке имеют общий множитель a , во второй скобке – общий множитель 5 . Вынесем эти множители за скобки: $A = a(a + 4) + 5(a + 4)$.

Теперь слагаемые имеют общий множитель $(a + 4)$, который вынесем за скобки: $A = (a + 4)(a + 5)$.

Таким образом, данный многочлен A разложен на произведение двух многочленов $a + 4$ и $a + 5$.

Пример 3

Разложим на множители многочлен $A = a^2 - 5ab + 6b^2$

Ситуация аналогична предыдущему примеру. Поэтому одночлен $5ab$ представим в виде суммы двух членов, т. е. $5ab = 2ab + 3ab$. Тогда данный многочлен имеет вид: $A = (a^2 - 2ab) + (-3ab + 6b^2)$.

Слагаемые в первой скобке имеют общий множитель a , во второй скобке – общий множитель $(-3ab)$. Вынесем эти множители за скобки: $A = a(a - 2b) - 3b(a - 2b)$.

Теперь слагаемые имеют общий множитель $(a - 2b)$, который вынесем за скобки: $A = (a - 2b)(a - 3b)$.

Итак, данный многочлен A разложен на произведение двух многочленов $a - 2b$ и $a - 3b$.

Этот прием разложения многочленов на множители также используется при решении уравнений и в задачах на делимость чисел.

Пример 4

Решим уравнение $x^2 - x - 2 = 0$.

Разложим левую часть уравнения на множители. Для этого одночлен $-x$ представим в виде $-x = x - 2x$. Тогда уравнение имеет вид:

$$x^2 + x - 2x - 2 = 0 \text{ или } (x^2 + x) + (-2x - 2) = 0;$$

$$\text{или } x(x + 1) - 2(x + 1) = 0, \text{ или } (x + 1)(x - 2) = 0.$$

Так как произведение двух множителей равно нулю, то хотя бы один из этих множителей равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $x + 1 = 0$ (его корень $x = -1$) и $x - 2 = 0$ (корень $x = 2$).

Итак, данное квадратное уравнение $x^2 - x - 2 = 0$ имеет два корня $x = -1$ и $x = 2$.

Пример 5

Докажем, что при любом натуральном значении n значение выражения $A = n^3 + 3n^2 + 2n$ кратно 6. Разложим многочлен A на множители. Сначала используем способ вынесения общего множителя за скобки и получим: $A = n(n^2 + 3n + 2)$.

Теперь способом группировки разложим квадратный трехчлен $n^2 + 3n + 2$ на множители. Представим одночлен $3n$ в виде $3n = n + 2n$. Тогда получаем: $n^2 + 3n + 2 = n^2 + n + 2n + 2 = (n^2 + n) + (2n + 2) =$
 $= n(n+1) + 2(n+1) = (n+1)(n+2)$.

Выражение A имеет вид $A = n(n+1)(n+2)$. Так как n натуральное число, то числа n , $n+1$, $n+2$ — три последовательных натуральных числа. Среди любых трех последовательных натуральных чисел (например, числа 13, 14, 15) хотя бы одно кратно 2 и хотя бы одно кратно 3. Поэтому произведение таких чисел будет кратно $2 \cdot 3 = 6$. Итак, при любом натуральном значении n значение выражения $A = n^3 + 3n^2 + 2n$ кратно 6.

IV. Задание на уроке

№ 755 (б); 756 (б, д); 757 (б); 758 (а, в); 759 (а); 761 (а); 762 (а); 763 (б); 764 (б); 765 (б); 766 (б).

V. Контрольные вопросы

- В каком случае используется способ группировки членов при разложении многочленов на множители?
- Как разложить многочлен на множители способом группировки? Поясните на примерах.

VI. Задание на дом

№ 755 (а); 756 (а, е); 757 (а); 758 (б, д); 759 (б); 761 (б); 762 (б); 763 (а); 764 (а); 765 (а); 766 (а).

VII. Подведение итогов урока

Урок 78. Доказательство тождеств

Цель: использовать способы преобразования многочленов для доказательства тождеств.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

- 1) Разложить на множители многочлен:

а) $a(b-c)+2b-2c$;

б) $2x^2+xy-y^2$.

- 2) Решите уравнение:

а) $x^2+2x^2+x+2=0$;

б) $x^2-5x+6=0$.

Вариант 2

- 1) Разложить на множители многочлен:

а) $a(b+c)+4b+4c$;

б) $3x^2-2xy-y^2$.

- 2) Решите уравнение:

а) $x^3+3x^2+x+3=0$;

б) $x^2-6x+8=0$.

III. Изучение нового материала

Напомним, что тождеством называется равенство, верное при любых значениях переменных. Чтобы доказать, что некоторое равенство является тождеством (чтобы доказать тождество) используют тождественные преобразования выражений. При этом можно доказать, что:

- 1) левая часть равенства после преобразования равна правой части;
- 2) наоборот, правая часть равенства после преобразований равна левой части;
- 3) обе части равенства после преобразований равны одному и тому же выражению.

Пример 1

Докажем тождество $a(b-c)-c(b-a)=b(a-c)$.

Преобразуем левую часть равенства. Для этого раскроем скобки и приведем подобные члены. Получаем:

$$a(b-c)-c(b-a)=ab-ac-bc+ac=ab-bc.$$

Вынесем общий множитель и за скобки: $ab-bc=b(a-c)$.

В результате тождественных преобразований было показано, что левая часть равенства равна правой. Таким образом, тождество доказано.

Пример 2

Докажем тождество $6x^2+19x-7-(3x-1)(2x+7)$.

Преобразуем левую часть равенства. Для этого раскроем скобки, перемножив двухчлены, и приведем подобные члены. Получаем:

$$\begin{aligned}(3x-1)(2x+7) &= 3x \cdot 2x + 3x \cdot 7 - 1 \cdot 2x - 1 \cdot 7 = 6x^2 + 21x - 2x - 7 = \\ &= 6x^2 + 19x - 7.\end{aligned}$$

В результате тождественных преобразований было показано, что правая часть равенства равна левой. Итак, тождество доказано.

Пример 3

Докажем тождество:

$$(3a - 2b)(2a + 5b) - 6ab = (a - 2b)(6a + 3b) + 14ab - 4b^2.$$

Преобразуем левую часть равенства, умножим многочлены и приведем подобные члены. Получаем:

$$(3a - 2b)(2a + 5b) - 6ab = 6a^2 + 15ab - 4ab - 10b^2 - 6ab = 6a^2 + 5ab - 10b^2.$$

Так же преобразуем правую часть равенства, выполнив аналогичные действия. Имеет:

$$(a - 2b)(6a + 3b) + 14ab - 4b^2 = 6a^2 + 3ab - 12ab - 6b^2 + 14ab - 4b^2 = 6a^2 + 5ab - 10b^2.$$

В результате тождественных преобразований было показано, что и левая и правая части равенства равны одному и тому же выражению $6a^2 + 5ab - 10b^2$. Следовательно, тождество доказано.

IV. Задание на уроке

№ 770 (а, в), 772 (б), 773 (в), 774 (а, в), 775, 777 (б), 778 (а, в), 779 (а), 780 (а, б).

V. Контрольные вопросы

- Какое равенство называется тождеством?
- Как доказать, что равенство является тождеством?

VI. Задание на дом

№ 770 (б, г); 772 (а); 773 (а); 774 (б, г); 776; 777 (а); 778 (б, г); 779 (б); 780 (в, г).

VII. Подведение итогов урока

Уроки 79–80. Контрольная работа № 6 по теме «Многочлены»

Контрольная работа составлена в шести вариантах (варианты 1, 2 – самые простые; варианты 3, 4 – средней сложности; варианты 5, 6 – самые сложные). Степень сложности меняется не слишком резко. Поэтому можно рекомендовать следующий критерий оценки: при решении вариантов 1, 2 оценка 3 ставится за любые три решенные задачи, оценка 4 – за четыре задачи и оценка 5 – за пять задач. Одна задача даст школьникам некоторую свободу выбора. При тех же критериях оценки за решение вариантов 3, 4 добавляется к набранным баллам дополнительно 0,5 балла; за решение вариантов 5, 6 – дополнительно 1,0 балла (то есть

оценка 5 ставится уже за 4 задачи). Все задачи в варианте примерно равноценны. Может быть несколько тяжелее задачи 5, 6.

Перед проведением контрольной работы учащихся целесообразно ознакомить с критериями оценки и разной сложностью вариантов. Выбор вариантов может быть осуществлен учителем или предоставлен учащимся (в этом случае предполагается наличие копировальной техники в школе и избыточное количество заданий работы). После урока-разбора контрольной решение всех задач шести вариантов может быть вывешено на стенде. Разумеется, разобрать такое количество задач на уроке невозможно (да и не нужно).

Вариант 1

1) Упростите выражение:

$$а) 3(x-2y)-2(3x-y); \quad б) (2a-3b)(a+b)-(a-2b)(a-b).$$

2) Разложите многочлен на множители:

$$а) 6ab-3b^2; \quad б) ac+bc-3a-3b.$$

3) Решите уравнение:

$$а) 2x^3+3x=0; \quad б) 4(x+1)=5(x-2).$$

4) Докажите, что выражение 27^2-18^2 кратно 5.

5) Катер с собственной скоростью 20 км/ч проплыл 4 часа по течению реки и 6 часов против течения. Весь путь катера составил 196 км. Найдите скорость течения реки.

6) Постройте график функции $y = \frac{x^2-2x}{x} + 1$.

Вариант 2

1) Упростите выражение:

$$а) 2(x-3y)-3(x+y); \quad б) (3a-b)(a+2b)-(2a-b)(a-b).$$

2) Разложите многочлен на множители:

$$а) 8ab-2b^3; \quad б) ac-bc+2a-2b.$$

3) Решите уравнение:

$$а) 5x+3x^2=0; \quad б) 7(x-3)=6(x-2).$$

4) Докажите, что выражение 21^2-14^2 кратно 5.

5) Катер с собственной скоростью 30 км/ч проплыл 3 часа по течению реки и 6 часов против течения. Весь путь катера составил 261 км. Найдите скорость течения реки.

6) Постройте график функции $y = \frac{x^2+2x}{x} - 1$.

Вариант 3

1) Упростите выражение: $3a^2(b^2-27a^2b^4)-10ab(0,3ab-1)+(9a^2b^2)^2$.

2) Разложите выражение на множители:

а) $2ax + 3by + 6ay + bx$; б) $(3a - 2b)^2 - (a + b)(3a - 2b)$.

3) Решите уравнение:

а) $\frac{2x+3}{4} - \frac{x+7}{12} = \frac{3x-1}{3}$; б) $(3x+1)(4x-5) = (3x+1)(2x-1)$.

4) Докажите, что выражение $3 \cdot 2^{14} + 5 \cdot 2^{33} - 7 \cdot 2^{31}$ кратно 37.

5) Если одну сторону квадрата увеличить на 6 см, то площадь получившегося прямоугольника будет на 28 см^2 больше площади квадрата. Найдите периметр квадрата.

6) Постройте график функции $y = \frac{x^3 + 2x^2}{x+2} - 1$.

Вариант 4

1) Упростите выражение: $4a^2(b^2 + 16a^2b^4) - 20ab(0,2ab - 1) - (8a^2b^2)^2$.

2) Разложите выражение на множители:

а) $ay - 12bx + 3ax - 4by$; б) $(2a - 5b)^2 - (a + 2b)(2a - 5b)$.

3) Решите уравнение:

а) $\frac{3x+2}{4} - \frac{x+5}{3} = \frac{2x+1}{12}$; б) $(2x+3)(5x-3) = (2x+3)(2x+6)$.

4) Докажите, что выражение $5 \cdot 2^{48} - 3 \cdot 2^{47} - 4 \cdot 2^{45}$ кратно 24.

5) Если одну сторону квадрата увеличить на 7 см, а другую сторону увеличить на 3 см, то площадь получившегося прямоугольника будет на 69 см^2 меньше площади квадрата. Найдите периметр квадрата.

6) Постройте график функции $y = \frac{x^3 - 2x^2}{x-2} - 1$.

Вариант 5

1) Докажите, что при всех значениях a , b и c значение выражения

$2a(a+b-c) - 2b(a-b-c) + 2c(a-b+c)$ больше числа $-\frac{3}{7}$.

2) Разложите выражение на множители:

а) $18a^2 + 27ab + 14ac + 21bc$; б) $a(3a - 2b)^2 + b(3a - 2b)(b + 3a)$.

3) Решите уравнение:

а) $x^2 + 8x + 15 = 0$; б) $x^2 - 4 = 0$.

4) Докажите, что при любом натуральном значении n значение выражения $n^2 + 3n + 1$ будет нечетным числом.

5) Найдите целые значения x и y , удовлетворяющие равенству:
 $y(x-2) = 13 - 5x$.

6) Постройте график функции $y = \frac{x^3 + 2x^2}{x} + 1$.

Вариант 6

1) Докажите, что при всех значениях a, b и c значение выражения

$$3c(a+b-c) + 3b(a-b-c) - 3a(a-b+c)$$
 больше числа $\frac{2}{3}$.

2) Разложите выражение на множители:

$$\text{а) } 16ab + 5bc + 10c^2 + 32ac; \quad \text{б) } b(2a - 3b)^2 + a(2a - 3b)(b + 2a).$$

3) Решите уравнение:

$$\text{а) } x^2 + 7x + 10 = 0; \quad \text{б) } x^2 - 9 = 0.$$

4) Докажите, что при любом натуральном значении n значение выражения $n^2 + 5n + 3$ будет нечетным числом.

5) Найдите целые значения x и y , удовлетворяющие равенству: $x(y+4) = 3y+15$.

6) Постройте график функции $y = \frac{x^3 - 2x^2}{x} + 1$.

Урок 81. Анализ контрольной работы

Ход урока

I. Подведение итогов контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Удобно данные заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

Итоги	№ задачи				
	1	2	3	...	6
+	5				
±	1				
-	1				
Ø	1				

Обозначения:

++ — число решивших задачу правильно или почти правильно;

± — число решивших задачу со значительными погрешностями;

-- — число не решивших задачу;

Ø — число не решавших задачу.

Варианты 1, 2 — 8 учащихся.

2. Типичные ошибки при решении задач.

3. Задачи, вызвавшие наибольшие трудности, и их разбор (учителем или школьниками, решившими эту задачу).

II. Разбор задач вариантов

Вариант 1

1) Ответ:

а) $-3x - 4y$;

б) $a^2 + 2ab - 5b^2$.

2) Ответ:

а) $3b(2a - b)$;

б) $(a + b)(c - 3)$.

3) Ответ:

а) $x = 0$;

б) $x = 14$.

4) Ответ: доказано.

5) Ответ: 2 км/ч.

6)

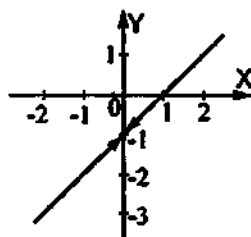


Рис. 2.1

Вариант 2

1) Ответ:

а) $-x - 9y$;

б) $a^2 + 8ab - 3b^2$.

2) Ответ:

а) $2b(4a - b^2)$;

б) $(a - b)(c + 2)$.

3) Ответ:

а) $x = 0$;

б) $x = 9$.

4) Ответ: доказано.

5) Ответ: 3 км/ч.

6)

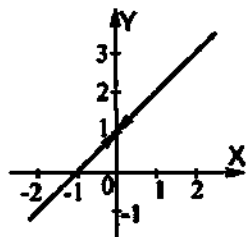


Рис. 2.2

Вариант 31) Ответ: $10ab$

2) Ответ:

а) $(x+3y)(2a+b)$;

б) $(3a-2b)(2a-3b)$.

3) Ответ:

а) $x = \frac{6}{7}$;

б) $x = -\frac{1}{3}$ и $x = 2$.

4) Ответ: доказано.

5) Ответ: 40 см.

6)

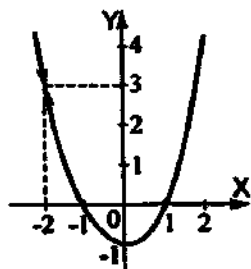


Рис. 2.3

Вариант 41) Ответ: $20ab$

2) Ответ:

а) $(y+3x)(a-4b)$;

б) $(2a-5b)(a-7b)$.

3) Ответ:

а) $x = 0$;

б) $x = -1,5$ и $x = 3$.

4) Ответ: доказано.

5) Ответ: 48 см.

6)

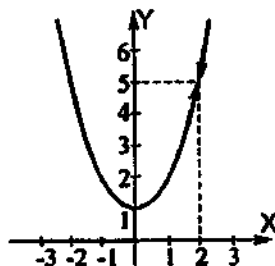


Рис. 2.4

Вариант 5

1. Упростим данное выражение. Для этого раскроем скобки и приведем подобные члены. Получаем: $2a(a+b-c) - 2b(a-b-c) + 2c(a-b+c) =$

$= 2a^2 + 2ab - 2ac - 2ba + 2b^2 + 2bc + 2ca - 2c^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 =$
 $= 2(a^2 + b^2 + c^2)$. При всех значениях переменных a , b и c выражения
 $a^2 \geq 0$, $b^2 \geq 0$ и $c^2 \geq 0$. Поэтому выражение $2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 0$ и тем
 более больше любого отрицательного числа (например, числа $-\frac{3}{7}$).

(Ответ: доказано.)

2. Разложим данное выражение на множители.

а) Сгруппируем члены и вынесем общие множители за скобки:

$$18a^2 + 27ab + 14ac + 21bc = (18a^2 + 27ab) + (14ac + 21bc) =$$

$$= 9a(2a + 3b) + 7c(2a + 3b) = (2a + 3b)(9a + 7c).$$

б) В выражении вынесем общий множитель $3a - 2b$ за скобки:

$$a(3a - 2b) + b(3a - 2b)(b + 3a) = (3a - 2b)(a(3a - 2b) + b(b + 3a)) =$$

$$= (3a - 2b)(3a^2 - 2ab + b^2 + 3ab) = (3a - 2b)(3a^2 + ab + b^2).$$

(Ответ: а) $(2a + 3b)(9a + 7c)$; б) $(3a - 2b)(3a^2 + ab + b^2)$.)

3. Для решения данного уравнения разложим левую часть на множители.

а) В уравнении $x^2 + 8x + 15 = 0$ член $8x$ представим в виде суммы слагаемых $8x = 3x + 5x$. Запишем уравнение в виде: $x^2 + 3x + 5x + 15 = 0$ или $(x^2 + 3x) + (5x + 15) = 0$, или $x(x + 3) + 5(x + 3) = 0$, или $(x + 3)(x + 5) = 0$.

Так как произведение множителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю. Получаем линейные уравнения: $x + 3 = 0$ (его корень $x = -3$) и $x + 5 = 0$ (корень $x = -5$).

Итак, уравнение имеет два корня.

б) В уравнении $x^2 - 4 = 0$ добавим и вычтем $2x$. Тогда уравнение имеет вид: $x^2 + 2x - 2x - 4 = 0$ или $(x^2 + 2x) + (-2x - 4) = 0$, или $x(x + 2) - 2(x + 2) = 0$, или $(x + 2)(x - 2) = 0$.

Так как произведение множителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю. Получаем линейные уравнения: $x + 2 = 0$ (его корень $x = -2$) и $x - 2 = 0$ (корень $x = 2$).

Это уравнение так же имеет два корня.

(Ответ: а) $x = -3$ и $x = -5$; б) $x = -2$ и $x = 2$.)

4. Запишем данное выражение в виде:

$n^2 + 3n + 1 = n^2 + n + 2n + 1 = (n^2 + n) + 2n + 1 = n(n + 1) + 2n + 1$. При любом натуральном значении n числа n и $n + 1$ — два последовательных натуральных числа, поэтому одно из них число четное и произведение

$n(n+1)$ будет четным числом. Число $2n$ имеет множитель 2 и так же является числом четным. Поэтому сумма четных чисел $n(n+1)$ и $2n$ и нечетного числа 1 будет числом нечетным.

(Ответ: доказано.)

5. Преобразуем данное равенство $y(x-2)=13-5x$. Для этого запишем его в виде: $y(x-2)+5x-10=3$ или $y(x-2)+5(x-2)=3$, или $(x-2)(y+5)=3$.

По условию числа x и y — целые. Поэтому числа $x-2$ и $y+5$ так же являются целыми. Тогда левая часть равенства является произведением двух целых чисел, которые будут делителями числа 3, стоящего в правой части. Рассмотрим четыре случая:

$$x-2=1 \text{ и } y+5=3 \text{ (откуда } x=3 \text{ и } y=-2),$$

$$x-2=-1 \text{ и } y+5=-3 \text{ (откуда } x=1 \text{ и } y=-8),$$

$$x-2=3 \text{ и } y+5=1 \text{ (откуда } x=5 \text{ и } y=-4),$$

$$x-2=-3 \text{ и } y+5=-1 \text{ (откуда } x=-1 \text{ и } y=-6).$$

(Ответ: $x=3$, $y=-2$; $x=1$, $y=-8$; $x=5$, $y=-4$; $x=-1$, $y=-6$.)

6. Преобразуем данную функцию $y = \frac{x^3 + 2x^2}{x} + 1$. Учтем, что знаменатель $x \neq 0$. Разложим числитель дроби на множители и сократим дробь: $y = \frac{x(x^2 + 2x)}{x} + 1 = x^2 + 2x + 1$.

Эту функцию можно записать в виде $y = (x+1)^2$. Построим график этой функции (парабола). Он получается из графика функции $y = x^2$ его смещением на одну единицу влево. Удалим из графика точку с абсциссой $x=0$ (показана стрелками).

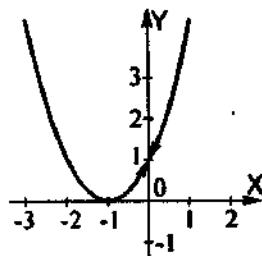


Рис. 2.5

Вариант 6

1. Упростим данное выражение. Для этого раскроем скобки и приведем подобные члены. Получаем: $3c(a+b-c) - 3b(a-b-c) - 3a(a-b+c) =$

$$= 3ac + 3cb - 3c^2 + 3ba - 3b^2 - 3bc - 3a^2 - 3ab - 3ac = -3a^2 - 3b^2 - 3c^2 = \\ = -3(a^2 + b^2 + c^2).$$

При всех значениях переменных a , b и c выражения $a^2 \geq 0$, $b^2 \geq 0$ и $c^2 \geq 0$. Поэтому выражение $2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 0$ и выражение $-3(a^2 + b^2 + c^2) \leq 0$. Тогда это выражение меньше любого положительного числа (например, числа $\frac{2}{3}$).

(Ответ: доказано.)

2. Разложим данное выражение на множители.

а) Сгруппируем члены и вынесем общие множители за скобки:

$$16ab + 5bc + 10c^2 + 32ac = (18ab + 5bc) + (10c^2 + 32ac) = \\ = b(16a + 5c) + 2c(5c + 16a) = b(16a + 5c) + 2c(16a + 5c) = \\ = (16a + 5c)(b + 2c).$$

б) В выражении вынесем общий множитель $2a - 3b$ за скобки:

$$a(2a - 3b) + a(2a - 3b)(b + 2a) = (2a - 3b)(b(2a - 3b) + a(b + 2a)) = \\ = (2a - 3b)(2ab - 3b^2 + ab + 2a^2) = (2a - 3b)(2a^2 + 3ab - 3b^2).$$

(Ответ: а) $(16a + 5c)(b + 2c)$; б) $(2a - 3b)(2a^2 + 3ab - 3b^2)$.)

3. Для решения данного уравнения разложим левую часть на множители.

а) В уравнении $x^2 + 7x + 10 = 0$ член $7x$ представим в виде суммы слагаемых $7x = 2x + 5x$. Запишем уравнение в виде: $x^2 + 2x + 5x + 10 = 0$ или $(x^2 + 2x) + (5x + 10) = 0$, или $x(x + 2) + 5(x + 2) = 0$, или $(x + 2)(x + 5) = 0$.

Так как произведение множителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю. Получаем линейные уравнения: $x + 2 = 0$ (его корень $x = -2$) и $x + 5 = 0$ (корень $x = -5$).

Итак, уравнение имеет два корня.

б) В уравнении $x^2 - 9 = 0$ добавим и вычтем $3x$. Тогда уравнение имеет вид: $x^2 + 3x - 3x - 9 = 0$ или $(x^2 + 3x) + (-3x - 9) = 0$, или $x(x + 3) - 3(x + 3) = 0$, или $(x + 3)(x - 3) = 0$.

Так как произведение множителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю. Получаем линейные уравнения: $x + 3 = 0$ (его корень $x = -3$) и $x - 3 = 0$ (корень $x = 3$).

Это уравнение так же имеет два корня.

(Ответ: а) $x = -2$ и $x = -5$; б) $x = -3$ и $x = 3$.)

4. Запишем данное выражение в виде:

$n^2 + 5n + 3 = n^2 + n + 4n + 3 = (n^2 + n) + 4n + 3 = n(n+1) + 4n + 3$. При любом натуральном значении n числа n и $n+1$ — два последовательных натуральных числа, поэтому одно из них число четное и произведение $n(n+1)$ будет четным числом. Число $4n$ имеет множитель 4 и так же является числом четным. Поэтому сумма четных чисел $n(n+1)$ и $4n$ и нечетного числа 3 будет числом нечетным.

(Ответ: доказано.)

5. Преобразуем данное равенство $x(y+4) = 3y+15$. Для этого запишем его в виде: $x(y+4) - 3y - 12 = 3$ или $x(y+4) - 3(y+4) = 3$, или $(y+4)(x-3) = 3$.

По условию числа x и y — целые. Поэтому числа $x+4$ и $y-3$ так же являются целыми. Тогда левая часть равенства является произведением двух целых чисел, которые будут делителями числа 3, стоящего в правой части. Рассмотрим четыре случая:

$y+4=1$ и $x-3=3$ (откуда $x=6$ и $y=-3$),

$y+4=-1$ и $x-3=-3$ (откуда $x=0$ и $y=-5$),

$y+4=3$ и $x-3=1$ (откуда $x=4$ и $y=-1$),

$y+4=-3$ и $x-3=-1$ (откуда $x=2$ и $y=-7$).

(Ответ: $x=6, y=-3$; $x=0, y=-5$; $x=4, y=-1$; $x=2, y=-7$.)

6. Преобразуем данную функцию $y = \frac{x^3 - 2x^2}{x} + 1$. Учтем, что знаменатель $x \neq 0$. Разложим числитель дроби на множители и сократим дробь: $y = \frac{x(x^2 - 2x)}{x} + 1 = x^2 - 2x + 1$.

Эту функцию можно записать в виде $y = (x-1)^2$. Построим график этой функции (парабола). Он получается из графика функции $y = x^2$ его смещением на одну единицу влево. Удалим из графика точку с абсциссой $x=0$ (показана стрелками).

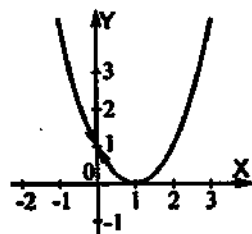


Рис. 2.6

Урок 82. Подготовка к тематическому плану

Цель: повторить решение задач по теме «Многочлены».

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Основные понятия

При решении задач напомнить нужные сведения из разделов 9–11 (уроки 63–83).

III. Задание на уроке

№ 787 (а); 791 (а, б); 794 (а); 802 (а); 811 (а); 813; 826 (а); 836 (а); 840 (а); 850 (а).

IV. Задание на дом

№ 787 (б); 791 (в); 794 (б); 802 (б); 811 (б); 814; 826 (б); 836 (б); 840 (б); 850 (б).

V. Подведение итогов урока

Уроки 83–84. Зачет по теме «Многочлены»

Цели: сравнение успеваемости учащихся при одинаковой сложности заданий; возможность повышения оценок за выполненные контрольные работы.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Характеристика зачетной работы

Работа составлена в двух равноценных вариантах. По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий. Соответственно у учащихся возрастает возможность выбора задач. Все задания разбиты на три блока А, В и С. Самые простые задачи находятся в части А, более сложные – в части В, еще сложнее – в части С. Каждая задача из А оценивается в 1 балл, из В – в 2 балла, из С – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 11 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Поэтому разбору заданий работы отдельного занятия можно и не посвящать (решения задач могут быть вывешены на стенде). Для стендового размещения разбор вариантов приводится.

Вариант 1

А

1. Выполните действия:

а) $3a^2(5a^2 - 2a)$;

б) $(2a - 3b)(5a + 7b)$.

2. Упростите выражение: $(2x - 3)(3x + 7) - (x - 5)(5x + 6) - x^2$ и вы-числите его значение при $x = \frac{11}{24}$.3. Приведите выражение $(2a^3 + b^2)(6a - b^2) - 12a^4 + b^4$ к многочлену стандартного вида и определите его степень.

4. Решите уравнение:

а) $7x + 15 = 2(x - 3)$;

б) $\frac{6x + 3}{x} = \frac{3(2x + 1)}{x}$.

5. Разложите многочлен на множители:

а) $3x^2y + 6xy - 15x^2y^2$;

б) $2x + 7y + 14 + xy$.

6. Докажите, что выражение $21^4 - 7^5 + 14^4$ кратно 90.

7. Поезд проехал третью часть расстояния между городами со скоростью 40 км/ч, а оставшийся путь — со скоростью 60 км/ч. Поездка заняла 7 часов. Найти расстояние между городами и скорость поезда.

В

8. Найдите значение выражения $a^2(a^2 - 3ab + 4) - 3ab(a^2 - 3ab + 4)$, если $a^2 - 3ab + 1 = 7$.

9. Разложите выражение на множители:

а) $(2a^2 - 3b)^2 - (2a^2 - 3b)(4a - 3b)$;

б) $a^2 - 6ab + 8b^2$.

10. Графически решите уравнение $2x - 3 = x - 1$.

11. Петя задумал число и прибавил к нему 5. Результат умножил на 7. Потом вычел удвоенное задуманное число. Полученное число разделил на 5. Потом вычел задуманное число. Какое число получил Петя?

С

12. Упростите выражение $(a - 2)(a^2 + 2a + 4) - a(a - 2)(a + 2) + 8$.13. Решите уравнение $(x^2 - 3x)^2 + 2(x^2 - 3x) = 0$.14. При каком значении параметра a уравнения $6(x - 3) = 2(x + 1)$ и $2x^2 + 3ax - 1 = 0$ имеют общий корень?

Вариант 2

А

1. Выполните действия:

а) $2a^3(4a^2 - 7a)$;

б) $(3a - 7b)(5a + 2b)$.

2. Упростите выражение $(2x-3)(5x+4)-(3x-2)(2x+4)-4x^2$ и вычислите его значение при $x=\frac{2}{5}$.

3. Приведите выражение $(3a^2+b^2)(5a-b^2)-15a^4+b^4$ к многочлену стандартного вида и определите его степень.

4. Решите уравнение:

$$\text{а) } 8x+19=3(x-4); \quad \text{б) } \frac{8x+4}{x} = \frac{4(2x+1)}{x}.$$

5. Разложите многочлен на множители:

$$\text{а) } 4xy^2-8xy+12x^2y^2; \quad \text{б) } 3x+5y+15+xy.$$

6. Докажите, что выражение $27^4-9^5+18^4$ кратно 88.

7. Поезд проехал четвертую часть расстояния между городами со скоростью 50 км/ч, а оставшийся путь — со скоростью 30 км/ч. Поездка заняла 6 часов. Найти расстояние между городами и скорость поезда.

В

8. Найдите значение выражения $a^2(a^2-5ab+3)-5ab(a^2-5ab+3)$, если $a^2-5ab+2=5$.

9. Разложите выражение на множители:

$$\text{а) } (3a^2-2b)^2-(3a^2-2b)(5a-2b); \quad \text{б) } a^2-7ab+10b^2.$$

10. Графически решите уравнение $4-2x=x+1$

11. Вася задумал число и прибавил к нему 7. Результат умножил на 5. Потом прибавил удвоенное задуманное число. Полученное число разделил на 7. Потом вычел задуманное число. Какое число получил Вася?

С

12. Упростите выражение $(a+3)(a^2-3a+9)-a(a-1)(a+1)-27$.

13. Решите уравнение $(x^2+5x)+6(x^2+5x)=0$.

14. При каком значении параметра a уравнения $5(x-4)=3(x-2)$ и $3x^2+2ax-5=0$ имеют общий корень?

III. Разбор заданий

Вариант 1

1. Ответ:

$$\text{а) } 15a^3-6a^3; \quad \text{б) } 10a^2-ab-2b^2.$$

2. Ответ: $24x+9$; 20.

3. Ответ: $-2a^3b^2+6ab^2$, пятая степень.

4. Ответ:

$$\text{а) } x=-4\frac{1}{5}; \quad \text{б) } x-\text{любое, кроме нуля.}$$

5. Ответ:

а) $3xy(x+2-5xy)$;

б) $(y+2)(x+7)$.

6. Ответ: доказано.

7. Ответ: 360 км; $51\frac{3}{7}$ км/ч.

8. Ответ: 60.

9. Ответ:

а) $2a(2a^2-3b)(a-2)$;

б) $(a-2b)(a-4b)$.

10. Ответ: $x=2$

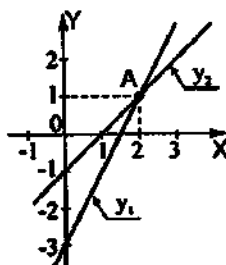


Рис. 2.7

11. Ответ: 7.

12. В данном выражении выполним аккуратно все указанные действия:

$$\begin{aligned} (a-2)(a^2+2a+4) - a(a-2)(a+2) + 8 &= a(a^2+2a+4) - 2(a^2+2a+4) - \\ &- a(a^2+2a-2a-4) + 8 = a^3 + 2a^2 + 4a - 2a^2 - 4a - 8 - a(a^2-4) + 8 = \\ &= a^3 - a^3 + 4a = 4a. \end{aligned}$$

Ответ: $4a$.

13. В левой части уравнения $(x^2-3x)^2+2(x^2-3x)=0$ вынесем общий множитель x^2+3x за скобки. Имеем: $(x^2-3x)(x^2-3x+2)=0$. Произведение двух множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, т. е. $x^2-3x=0$ или $x^2-3x+2=0$. Решим эти уравнения разложением на множители.

а) Вынесем общий множитель x за скобки: $x(x-3)=0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем: $x=0$ или $x-3=0$ (корень этого уравнения $x=3$).

б) Представим член $-3x$ в виде $-3x=-x-2x$ и используем группировку членов. Получаем: $x^2-x-2x+2=0$ или $(x^2-x)+(-2x+2)=0$, $x(x-1)-2(x-1)=0$, или $(x-1)(x-2)=0$.

Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $x-1=0$ (его корень $x=1$) и $x-2=0$ (корень $x=2$).

Итак, данное уравнение имеет четыре корня.

Ответ: $x=0$, $x=3$, $x=1$, $x=2$.

14. Сначала решим линейное уравнение $6(x-3)=2(x+1)$. Раскроем скобки: $6x-18=2x+2$ или $6x-2x=18+2$, или $4x=20$, откуда $x=5$.

По условию это число является и корнем второго уравнения $2x^2+3ax-1=0$. Подставим корень в это уравнение и получим:

$$2 \cdot 5^2 + 3a \cdot 5 - 1 = 0 \text{ или } 50 + 15a - 1 = 0, 15a = -49, \text{ откуда } a = -\frac{49}{15} = -3\frac{4}{15}.$$

При таком значении a два данных уравнения имеют общий корень $x=5$.

Ответ: $a = -3\frac{4}{15}$.

Вариант 2

1. Ответ:

а) $8a^5 - 14a^4$;

б) $15a^2 - 29ab - 14b^2$.

2. Ответ: $-15x - 4$; -10 .

3. Ответ: $-3a^3b^2 + 5ab^2$, пятая степень.

4. Ответ:

а) $x = -6\frac{1}{5}$;

б) x — любое, кроме нуля.

5. Ответ:

а) $4xy(y-2+3xy)$;

б) $(x+5)(y+3)$.

6. Ответ: доказано.

7. Ответ: 200 км; $33\frac{1}{3}$ км/ч.

8. Ответ: 18.

9. Ответ:

а) $a(3a^2 - 2b)(3a - 5)$;

б) $(a - 2b)(a - 5b)$.

10. Ответ: $x=1$

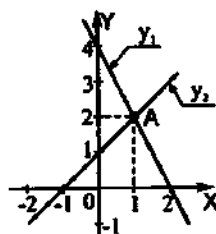


Рис. 2.8

11. Ответ: 5.

12. В данном выражении выполним аккуратно все указанные действия:

$$\begin{aligned}
 (a+3)(a^2-3a+9)-a(a-1)(a+1)-27 &= a(a^2-3a+9)+3(a^2-3a+9)- \\
 -a(a^2+a-a-1)-27 &= a^3-3a^2+9a+3a^2-9a+27-a(a^2-1)-27= \\
 &= a^3-a^3+a=a.
 \end{aligned}$$

Ответ: a .

13. В левой части уравнения $(x^2+5x)^2+6(x^2+5x)=0$ вынесем общий множитель x^2+5x за скобки. Имеем: $(x^2+5x)(x^2+5x+6)=0$. Произведение двух множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, т. е. $x^2+5x=0$ или $x^2+5x+6=0$. Решим эти уравнения разложением на множители.

а) Вынесем общий множитель x за скобки: $x(x+5)=0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем: $x=0$ или $x+5=0$ (корень этого уравнения $x=-5$).

б) Представим член $5x$ в виде $5x=2x+3x$ и используем группировку членов. Получаем: $x^2+2x+3x+6=0$ или $(x^2+2x)+(3x+6)=0$, $x(x+2)+3(x+2)=0$, или $(x+2)(x+3)=0$.

Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $x+2=0$ (его корень $x=-2$) и $x+3=0$ (корень $x=-3$).

Итак, данное уравнение имеет четыре корня.

Ответ: $x=0$, $x=-5$, $x=-2$, $x=-3$.

14. Сначала решим линейное уравнение $5(x-4)=3(x-2)$. Раскроем скобки: $5x-20=3x-6$ или $5x-3x=20-6$, или $2x=14$, откуда $x=7$.

По условию это число является и корнем второго уравнения $3x^2+2ax-5=0$. Подставим корень в это уравнение и получим: $3 \cdot 7^2+2a \cdot 7-5=0$ или $147+14a-5=0$, $14a=-142$, откуда

$$a = -\frac{142}{14} = -10\frac{1}{7}.$$

При таком значении a два данных уравнения имеют общий корень $x=7$.

Ответ: $a = -10\frac{1}{7}$.

Глава V. Формулы сокращенного умножения

§ 12. Квадрат суммы и квадрат разности

Уроки 85–86. Возведение в квадрат суммы и разности двух выражений

Цель: получение и использование формул для возведения в квадрат суммы и разности выражений.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

При перемножении многочленов и приведении их к стандартному виду, а также при решении многих других задач очень полезными оказываются формулы сокращенного умножения.

Прежде всего, рассмотрим формулы для возведения в квадрат суммы и разности двух выражений.

(1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа плюс удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа).

(2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа минус удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа).

Тождество (1) называют формулой квадрата суммы, тождество (2) – формулой квадрата разности. Эти формулы позволяют проще возводить в квадрат сумму или разность любых двух чисел (выражений). Формулы (1) и (2) можно получить алгебраическим и геометрическим способами.

Выведем формулу $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

а) Алгебраический способ.

По определению $A = (a+b)^2 = (a+b)(a+b)$. Перемножим эти многочлены: $A = (a+b)(a+b) = a(a+b) + b(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

б) Геометрический способ.

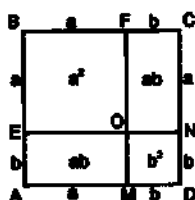


Рис. 2.9

Рассмотрим квадрат $ABCD$ со стороной $a+b$. Его площадь, очевидно, равна $(a+b)^2$. Теперь на расстоянии a от вершины B проведем прямые EN и PM , параллельные сторонам квадрата. Эти прямые разбили нашу фигуру на квадрат $BFOE$ (со стороной a и площадью a^2), квадрат $OMDN$ (со стороной b и площадью b^2) и два прямоугольника $AEOM$ и $FONC$ (со сторонами a и b и площадью ab).

Так как эти четыре фигуры полностью расположены внутри исходного квадрата, то сумма их площадей $a^2 + b^2 + 2ab$ равна площади большого квадрата $(a+b)^2$. Поэтому получаем: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Заметим, что формула квадрата суммы была получена древнегреческими математиками еще до нашей эры (свыше 2000 лет назад) именно геометрическим способом. Видно, что применение алгебры позволяет значительно упростить и ускорить вывод формул.

Теперь выведем формулу $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

а) Алгебраический способ.

По определению $A = (a-b)^2 = (a-b)(a-b)$. Перемножим эти многочлены: $A = (a-b)(a-b) = a(a-b) - b(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2$.

Приведем теперь подобные члены и получим: $A = a^2 - 2ab + b^2$.

Заметим, что эту формулу можно вывести и из формулы (1), заменив операцию вычитания операцией сложения $a-b = a+(-b)$. Тогда получаем: $(a-b)^2 = (a+(-b))^2 = a^2 + 2a \cdot (-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

б) Геометрический способ.

Для определенности будем считать, что $a > b$. Рассмотрим квадрат $ABCD$ со стороной a . Его площадь, очевидно, равна a^2 .

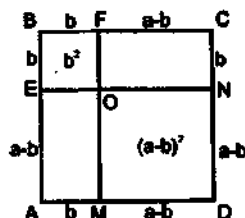


Рис. 2.10

Теперь на расстоянии b от вершины B проведем прямые EN и PM , параллельные сторонам квадрата. Эти прямые разбили фигуру на квадрат $BFOE$ (со стороной $a-b$ и площадью $(a-b)^2$) и два прямоугольника $ABFM$ и $BCNE$ (со сторонами a и b и площадью ab).

Площадь квадрата $OMDN$ (равная $(a-b)^2$) получится, если из площади квадрата $ABCD$ (равной a^2) вычесть площади двух прямоугольников $ABFM$ и $BCNE$ (каждая из которых равна ab) и добавить площадь квадрата $BFOE$ (равную b^2). Поэтому получаем: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Рассмотрим примеры применения формулы квадрата суммы и квадрата разности.

Пример 1

Вычислим 52^2 . Запишем число 52 в виде $52 = 50 + 2$ и используем формулу квадрата суммы:

$$52^2 = (50+2)^2 = 50^2 + 2 \cdot 50 \cdot 2 + 2^2 = 2500 + 200 + 4 = 2704.$$

Пример 2

Найдем 49^2 . Запишем число 49 в виде $49 = 50 - 1$ и используем формулу квадрата разности:

$$49^2 = (50-1)^2 = 50^2 - 2 \cdot 50 \cdot 1 + 1^2 = 2500 - 100 + 1 = 2401.$$

Пример 3

Возведем в квадрат сумму $5a + 3b$. По формуле квадрата суммы получаем: $(5a + 3b)^2 = (5a)^2 + 2 \cdot 5a \cdot 3b + (3b)^2 = 25a^2 + 30ab + 9b^2$.

Пример 4

Возведем в квадрат разность $7a - 2b$. По формуле квадрата разности имеем: $(7a - 2b)^2 = (7a)^2 - 2 \cdot 7a \cdot 2b + (2b)^2 = 49a^2 - 28ab + 4b^2$.

Пример 5

Доказать, что выражение $A = (a-4)^2 - 2(a+8)(a-4) + (a+8)^2$ не зависит от a , и найти величину A .

Запишем выражение A в виде: $A = (a-4)^2 - 2(a-4)(a+8) + (a+8)^2$.

Теперь легко сообразить, что выражение A является квадратом разности чисел $(a-4)$ и $(a+8)$. Поэтому получаем: $A = ((a-4) - (a+8))^2 = (a-4-a-8)^2 = (-12)^2 = 144$.

Действительно, выражение A не зависит от a и $A = 144$.

Пример 6

Упростим выражение $(4a + 3b)^2 - 2a(8a + 12b) - (2b)^2$.

Используем формулу квадрата суммы, раскроем скобки и приведем

подобные члены. Получаем: $(4a + 3b)^2 - 2a(8a + 12b) - (2b)^2 =$
 $= (4a)^2 + 2 \cdot 4a \cdot 3b + (3b)^2 - 2a \cdot 8a - 2a \cdot 12b - 4b^2 =$
 $= 16a^2 + 24ab + 9b^2 - 16a^2 - 24ab - 4b^2 = 5b^2.$

III. Задание на уроке

№ 859 (б, г); 862 (а, е); 865 (а); 869 (г, е); 870 (в); 872 (г); 874 (б, е); 875 (д); 877 (б); 879 (а); 884 (а); 885.

IV. Контрольные вопросы

- Напишите формулу квадрата суммы и дайте ее формулировку словами.
- Выведите формулу квадрата суммы алгебраическим способом.
- Выведите формулу квадрата суммы геометрическим способом.
- Напишите формулу квадрата разности и дайте ее формулировку словами.
- Выведите формулу разности алгебраическим способом.
- Выведите формулу разности геометрическим способом.

V. Задание на дом

№ 859 (а, с); 862 (б, г); 869 (в, з); 870 (г); 872 (а); 874 (а, д); 875 (б); 877 (д); 879 (б); 884 (б); 886.

VI. Подведение итогов урока

Уроки 87–88. Разложение на множители с помощью формул квадрата суммы и квадрата разности

Цель: использовать формулы квадрата суммы и разности для разложения многочленов на множители.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант I

- 1) Напишите формулу квадрата суммы и дайте ее формулировку словами.
- 2) Представьте в виде многочлена:

а) $(2a + 7b)^2$;

б) $(3a^2 - 4b^3)^2$.

3) Упростите выражение $(3a-2b)^2 - 3a(4a-4b)$ и найдите его значение при $b = \frac{1}{2}$.

4) Найдите значение выражения $(a-3)^2 + (6-a)^2 + 2(a-3)(6-a)$.

Вариант 2

1) Напишите формулу квадрата суммы и дайте ее формулировку словами.

2) Представьте в виде многочлена:

а) $(3a+5b)^2$;

б) $(2a^2-6b^3)^2$.

3) Упростите выражение $(2a-3b)^2 - 3b(3b-4a)$ и найдите его значение при $a = -\frac{1}{2}$.

4) Найдите значение выражения $(a-2)^2 + (5+a)^2 - 2(a-2)(5+a)$.

III. Изучение нового материала

Формулы квадрата суммы и квадрата разности используют для разложения на множители многочленов вида $a^2+2ab+b^2$ и $a^2-2ab+b^2$ выделения полных квадратов суммы и разности чисел, доказательства тождеств, неравенств и т. д. Для этого формулы предыдущего урока запишем, поменяв местами левую и правую части: $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ и $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

Заметим, что выражение $c^2=c \cdot c$. Поэтому приведенные формулы можно рассматривать как разложение многочлена на множители. Представление выражений $a^2+2ab+b^2$ в виде $(a+b)^2$ и $a^2-2ab+b^2$ в виде $(a-b)^2$ называют так же выделением полных квадратов суммы и разности.

Пример 1

Разложим на множители многочлен $4x^2+12x+9$. Первое слагаемое $4x^2$ представляет собой квадрат выражения $2x$, третье – квадрат числа 3. Легко проверить, что второе слагаемое – удвоенное произведение выражения $2x$ и числа 3, т. е. $12x=2 \cdot 2x \cdot 3$. Тогда данный многочлен имеет вид: $4x^2+12x+9=(2x)^2+2 \cdot 2x \cdot 3+3^2=(2x+3)^2$.

Пример 2

Разложим на множители выражение $9a^2 - 30ab^2 + 25b^4$. Первое слагаемое $9a^2$ является квадратом выражения $3a$, третье слагаемое $25b^4$ — квадратом выражения $5b^2$. Проверим, что второе слагаемое — удвоенное произведение выражений $3a$ и $5b^2$, т. е. $30ab = 2 \cdot 3a \cdot 5b^2$. Тогда данный трехчлен имеет вид:

$$9a^2 - 30ab^2 + 25b^4 = (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 5b^2 + (5b^2)^2 = (3a - 5b^2)^2.$$

Пример 3

Найдем наименьшее значение выражения $A = 2a^2 - 4a + 10$.

В данном выражении вынесем общий множитель 2 за скобки:
 $A = 2(a^2 - 2a + 5)$.

В выражении $a^2 - 2a + 5$ выделим полный квадрат разности:

$$a^2 - 2a + 5 = (a^2 - 2a + 1) + 4 = (a^2 - 2 \cdot a \cdot 1 + 1^2) + 4 = (a - 1)^2 + 4.$$

Поэтому данное выражение можно записать в виде:

$$A = 2((a - 1)^2 + 4) = 2(a - 1)^2 + 8.$$

Очевидно, что слагаемое $2(a - 1)^2 \geq 0$. Выражение A будет принимать наименьшее значение, если слагаемое $2(a - 1)^2$ будет наименьшим, т. е. $2(a - 1)^2 = 0$. Это выполняется, если $a - 1 = 0$, т. е. $a = 1$. Тогда наименьшее значение данного выражения $A = 2 \cdot (1 - 1)^2 + 8 = 2 \cdot 0^2 + 8 = 8$.

Пример 4

Докажем, что при всех значениях переменных a и b значение выражения $A = 2a^2 + b^2 - 2ab + 4a + 6$ больше 1.

В данное выражение A входят две переменные a и b . Представим слагаемое $2a$ в виде $2a^2 = a^2 + a^2$ и сгруппируем члены выражения:

$$A = a^2 + a^2 - 2ab + b^2 + 4a + 6 = (a^2 - 2ab + b^2) + a^2 + 4a + 6.$$

Выражение в скобках является квадратом разности $a - b$. Чтобы в оставшихся слагаемых выделить квадрат суммы, представим число 6 в виде суммы чисел $6 = 4 + 2$. Тогда выражение A имеет вид:

$$A = (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 + 4a + 4) + 2 = (a - b)^2 + (a + 2)^2 + 2.$$

При всех значениях переменных a и b выражения $(a - b)^2 \geq 0$ и $(a + 2)^2 \geq 0$, поэтому данное выражение $A \geq 2$ и, тем более, $A > 1$.

IV. Задание на уроке

№ 893 (а, г); 894 (в); 895 (в, д); 896 (а, г); 897 (а); 899 (в); 902 (а); 903 (а, в); 904 (а, г); 905 (а); 906 (а, г).

V. Задание на дом

№ 893 (в, д); 894 (г); 895 (а, б); 896 (б, в); 897 (б); 899 (д); 902 (б); 903 (б, в); 905 (а); 906 (а, г).

VI. Творческие задания

1. Найдите наименьшее (или наибольшее) значение выражения. При каком значении переменных оно достигается?

а) $a^2 - 4x + 7$;

б) $y^2 - 6y + 1$;

в) $6 + x - x^2$;

г) $3 - 4y - y^2$;

д) $x^2 + 2x + y^2$;

е) $x^2 - 4xy + 5y^2$;

ж) $x^2 - 4x + y^2 + 6y + 5$.

(Ответы: а) 3 при $x = 2$; б) -8 при $y = 3$; в) $6\frac{1}{4}$ при $x = \frac{1}{2}$; г) 7 при $y = -2$; д) -1 при $x = -1$, $y = 0$; е) 0 при $x = y = 0$; ж) -8 при $x = 2$, $y = -3$.)

2. Докажите неравенство:

а) $x^2 + 4x \geq -4$;

б) $y^2 + 9 \geq 6y$;

в) $x^2 + y^2 \geq 2xy$;

г) $x^2 + 4y^2 \geq -4xy$;

д) $-x^2 + 10x < 26$;

е) $-y^2 + 8y - 16 < 5$;

ж) $x^2 + 4x + y^2 - 8y + 25 > 3$;

з) $2x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x > -2$;

и) $x^2 - 2xy + 5y^2 + 4y > -5$.

§ 13. Разность квадратов. Сумма и разность кубов**Уроки 89–90. Умножение разности двух выражений на их сумму**

Цель: ознакомить с формулой для разности квадратов и ее применением.

Ход урока**I. Сообщение темы и цели урока****II. Повторение и закрепление пройденного материала**

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1) Преобразуйте трехчлен в квадрат двучлена:

а) $x^4 - 8x^2 + 16$;

б) $a^4 + 6a^2b + 9b^2$.

2) Докажите неравенство: $9x^2 + 4y^2 > 12xy - 1$.

Вариант 2

1) Преобразуйте трехчлен в квадрат двучлена:

а) $y^6 + 6y^3 + 9$;

б) $a^4 - 8a^2b + 16b^2$.

2) Докажите неравенство: $9y^2 + 16x^2 > 24xy - 2$.

III. Изучение нового материала

Приведем еще одну формулу сокращенного умножения

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2, (1)$$

которая позволяет быстро умножать разность и сумму одних и тех же чисел a и b .

Выведем эту формулу.

а) Алгебраический способ.

множим разность чисел $a-b$ на их сумму $a+b$. Получаем:

$$(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2.$$

б) Геометрический способ.

Рассмотрим фигуру, изображенную на рисунке.

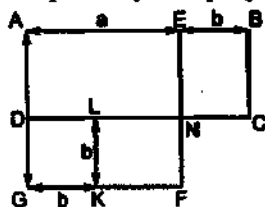


Рис. 2.11

Стороны прямоугольника $ABCD$ равны $AB = a + b$ и $AD = a - b$ (для определенности считаем, что $a, b > 0$ и $a > b$) и его площадь $S = AD \cdot AB = (a-b)(a+b)$. Этот прямоугольник состоит из прямоугольников $AEND$ и $EBCN$. Прямоугольник $EBCN$ равен прямоугольнику $KLNF$. Поэтому площадь S равна площади фигуры $AENFKL$, которая равна разности площадей квадратов $AEFG$ (со стороной a) и $DLKG$ (со стороной b), т. е. $S = a^2 - b^2$. Приравняв два выражения для площади S , получаем равенство $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

В соответствии с тождеством (1) произведение разности чисел выражений на их сумму равно разности квадратов этих чисел (выражений). Тождество (1) широко используется при алгебраических преобразованиях выражений.

Пример 1

Умножим числа 47 и 53, записав их в виде разности и суммы двух чисел: $47 = 50 - 3$ и $53 = 50 + 3$. Тогда получаем, используя формулу (1): $47 \cdot 53 = (50 - 3)(50 + 3) = 50^2 - 3^2 = 2500 - 9 = 2491$.

Пример 2

Сравним числа $A = 141 \cdot 144 \cdot 148 \cdot 151$ и $B = 146^4$. Получаем:

$$141 = 146 - 5, 144 = 146 - 2, 148 = 146 + 2, 151 = 146 + 5.$$

Тогда число A имеет вид: $A = (146 - 5)(146 - 2)(146 + 2)(146 + 5)$.

Изменим порядок умножения сомножителей, перемножив сначала два крайних числа, а затем два средних. Получаем:

$$A = (146 - 5)(146 + 5) \cdot (146 - 2)(146 + 2).$$

Используя формулу (1), имеем: $A = (146^2 - 5^2)(146^2 - 2^2)$.

Очевидно, что в таком произведении каждый множитель меньше числа 146^2 , т. е. $146^2 - 5^2 < 146^2$ и $146^2 - 2^2 < 146^2$. Поэтому произведение меньше $146^2 \cdot 146^2 = 146^{2+2} = 146^4 = B$. Таким образом, число A меньше числа B , т. е. $A < B$.

Пример 3

Умножим выражения $4a - 5b$ и $4a + 5b$.

Используя формулу (1) и правила действий со степенями, получим:

$$(4a - 5b)(4a + 5b) = (4a)^2 - (5b)^2 = 16a^2 - 25b^2.$$

Пример 4

Представим в виде многочлена выражения $(3a^3 - 2b^2)(3a^3 + 2b^2)$.

Применим тождество (1) и получим:

$$(3a^3 - 2b^2)(3a^3 + 2b^2) = (3a^3)^2 - (2b^2)^2 = 9a^6 - 4b^4.$$

Пример 5

Умножим выражения $-6a - 5b$ и $6a - 5b$.

В первом выражении $-6a - 5b$ вынесем за скобки число (-1) и получим: $(-6a - 5b)(6a - 5b) = (-1)(6a + 5b)(6a - 5b) = -((6a)^2 - (5b)^2) = -(36a^2 - 25b^2) = 25b^2 - 36a^2$.

Заметим, что преобразование можно выполнить и сразу:

$$(-6a - 5b)(6a - 5b) = (-5b - 6a)(-5b + 6a) = (-5b)^2 - (6a)^2 = 25b^2 - 36a^2.$$

Пример 6

Упростим выражение $(6a - 7b)(6a + 7b) - (3a + 4b) \cdot (12a - 17b) - 3ab$.

$$\begin{aligned} &\text{Раскроем скобки, причем для первого произведения используем тождество (1). Получаем: } (6a - 7b)(6a + 7b) - (3a + 4b) \cdot (12a - 17b) - 3ab = \\ &= (6a)^2 - (7b)^2 - (36a^2 - 51ab + 48ab - 68b^2) - 3ab = \\ &= 36a^2 - 49b^2 - (36a^2 - 3ab - 68b^2) - 3ab = \\ &= 36a^2 - 49b^2 - 36a^2 + 3ab + 68b^2 - 3ab = 19b^2. \end{aligned}$$

IV. Задание урока

№ 912 (в, к); 915 (в); 916 (а, г); 917 (в); 918 (б, д); 920 (в, г); 922 (б); 923 (в); 925 (в); 926 (а); 930 (б); 932 (б).

V. Контрольные вопросы

- Напишите формулу для произведения разности и суммы чисел. Дайте ее словесную формулировку.
- Выведите формулу для произведения разности и суммы чисел алгебраическим способом.
- Выведите формулу для произведения разности и суммы чисел геометрическим способом.

VI. Задание на дом

№ 912 (а, з); 915 (д); 916 (б); 917 (г); 918 (а, г); 920 (а, в); 922 (в); 923 (д); 925 (а); 926 (д); 928; 930 (а); 933 (б).

VII. Творческие задания

1. Выполните действия:

а) $97 \cdot 103$;	б) $95 \cdot 97 \cdot 103 \cdot 105$;
в) $98 \cdot 100 \cdot 102$;	г) $(3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)$;
д) $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$;	
е) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$;	
ж) $(b+c)(b^4+c^4)(b^2+c^2)(b-c)$;	
з) $(a+b)(a^2+b^2)(a-b) + (a^2-b^2) + 2a^2b^2$.	

(Ответы: а) 9991; б) 99996375; в) 999600; г) $38 \cdot 1$; д) $216 - 1$ (умножить выражение на $2 - 1 = 1$); е) $a^8 - b^8$; ж) $b^8 - c^8$ (изменить порядок умножения); з) $2a^4$.)

2. Сравните числа:

а) $43 \cdot 47$ и 45^2 ;	б) $81 \cdot 87$ и 84^2 ;
в) $164 \cdot 168$ и 167^2 ;	г) $153 \cdot 155 \cdot 157$ и 155^3 ;

д) $232 \cdot 233 \cdot 236$ и 234^3 ; е) $132 \cdot 138 \cdot 254 \cdot 258$ и $(135 \cdot 256)^2$.

(Ответы: первые числа меньше, чем вторые.)

VIII. Подведение итогов урока

Уроки 91–92. Разложение разности квадратов на множители

Цель: использование формулы для разности квадратов для разложения выражений на множители.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1) Вычислите произведение чисел:

а) $97 \cdot 103$;

б) $17,7 \cdot 18,3$.

2) Выполните умножение:

а) $(3a - 4b)(3a + 4b)$;

б) $(-6a - 5b)(6a - 5b)$.

3) Упростите выражение: $(2a - 3b)(2a + 3b) + 9b(b + 1)$.

Вариант 2

1) Вычислите произведение чисел:

а) $104 \cdot 96$;

б) $15,7 \cdot 16,3$.

2) Выполните умножение:

а) $(2b - 3a)(2b + 3a)$;

б) $(-4a - 5b)(4a - 5b)$.

3) Упростите выражение: $(3a - 4b)(3a + 4b) - 9a(a - 1)$.

III. Изучение нового материала

В равенстве $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ поменяем местами части и получим тождество $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Разность квадратов двух чисел (выражений) равна произведению разности этих чисел (выражений) и их суммы. Такое тождество называют формулой разности квадратов. Ее используют для разложения на множители разности квадратов чисел или выражений.

Пример 1

Докажем, что число $47^4 - 32^2$ составное.

Используем формулу разности квадратов и получим:

$$47^4 - 32^2 = (47^2)^2 - 32^2 = (47^2 - 32)(47^2 + 32).$$

Видно, что у данного числа есть множители $47^2 - 32$ и $47^2 + 32$. Поэтому такое число по определению является составным.

Пример 2

Докажем, что число $16^4 - 231^2$ кратно 25.

$$\text{Применим формулу разности квадратов и получим: } 16^4 - 231^2 = (16^2)^2 - 231^2 = 256^2 - 231^2 = (256 - 231)(256 + 231) = 25 \cdot 487.$$

Так как данное число имеет делитель 25, то оно кратно 25.

Пример 3

Сократим дробь $\frac{53^2 - 32^2}{61^2 - 44^2}$.

Используя формулу разности квадратов, разложим числитель и знаменатель дроби на множители. Имеем:

$$\frac{53^2 - 32^2}{61^2 - 44^2} = \frac{(53 - 32)(53 + 32)}{(61 - 44)(61 + 44)} = \frac{21 \cdot 85}{17 \cdot 105} = \frac{21 \cdot 17 \cdot 5}{17 \cdot 21 \cdot 5} = 1.$$

Пример 4

Найдем значение выражения $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$.

В приведенную сумму входят 100 чисел. Сгруппируем их последовательно попарно и используем формулу разности квадратов. Получаем: $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2 = (100^2 - 99^2) + (98^2 - 97^2) + \dots + (2^2 - 1^2) = (100 - 99)(100 + 99) + (98 - 97)(98 + 97) + \dots + (2 - 1)(2 + 1) = 1 \cdot 199 + 1 \cdot 195 + \dots + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 3 = 199 + 195 + \dots + 7 + 3$.

После группировки членов получилось 50 выражений, поэтому надо сложить 50 чисел. Каждое следующее число на 4 меньше предыдущего (т. е. числа образуют арифметическую прогрессию).

Чтобы найти сумму чисел так же сгруппируем их попарно: первое с последним, второе с предпоследним и т. д. Имеем: $199 + 195 + \dots + 7 + 3 = (199 + 3) + (195 + 7) + \dots = 202 + \dots + 202 = 202 \cdot 25 = 5050$.

Заметим, что при попарной группировке 50 чисел получилось 25 скобок и затем 25 одинаковых чисел 202.

Пример 5

Разложим на множители выражение $25x^4 - 16y^2$.

Представим этот двучлен в виде разности квадратов и используем формулу разности квадратов:

$$25x^4 - 16y^2 = (5x^2)^2 - (4y)^2 = (5x^2 - 4y)(5x^2 + 4y).$$

Пример 6

Разложим на множители квадратный трехчлен $x^2 + 4x + 3$.

Дополним это выражение до квадрата суммы:

$$x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 4 - 1 = (x^2 + 4x + 4) - 1 = (x + 2)^2 - 1^2.$$

Затем применим формулу разности квадратов:

$$(x + 2)^2 - 1 = (x + 2 - 1)(x + 2 + 1) = (x + 1)(x + 3).$$

Таким образом, получили $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$.

Заметим, что ранее для разложения квадратных трехчленов использовали способ группировки членов. Представим член $4x$ в виде $4x = x + 3x$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда имеем: } x^2 + 4x + 3 &= x^2 + x + 3x + 3 = (x^2 + x) + (3x + 3) = \\ &= x(x + 1) + 3(x + 1) = (x + 1)(x + 3). \end{aligned}$$

Пример 7

Разложим на множители двучлен $n^4 + 4$.

Для разложения двучлена дополним его до квадрата суммы. Для этого прибавим и вычтем $4n^2$ и используем формулу разности квадратов. Получаем: $n^4 + 4 = n^4 + 4 + 4n^2 - 4n^2 = (n^4 + 4n^2 + 4) - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 + 2 - 2n)(n^2 + 2 + 2n) = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$.

IV. Задание на уроке

№ 939 (в); 940 (б); 942 (б, г); 943 (а); 944 (д); 945 (в); 946 (б, д); 948 (в); 951 (а, д); 953(а); 955; 956.

V. Задание на дом

№ 939 (б, л); 940 (г, м); 942 (в); 944 (г, е); 945 (а, е); 946 (а, в, ж); 948 (е, и); 951 (а, д); 953 (г); 955; 956.

VI. Творческие задания

1. Разложите на множители выражение:

а) $x^2 + 6x + 8$; б) $8 - 2x - x^2$; в) $x^2 + 14x + 48$;

г) $-x^2 + 10x - 24$; д) $4x^2 + 1$; е) $x^4 + x^2 + 1$.

(Ответы: а) $(x + 2)(x + 4)$; б) $(x + 4)(2 - x)$; в) $(x + 6)(x + 8)$;

г) $(x - 4)(6 - x)$; д) $(2x^2 - 2x + 1)(2x^2 + 2x + 1)$ (добавить и вычесть $4x^2$);

е) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$ (добавить и вычесть x^2).)

2. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения:

а) $(3n^2 + 2)^2 - 4^2$ кратно 3; б) $(5n + 1)^2 - 9^2$ кратно 5;

в) $(4n + 1)^2 - (2n + 5)^2$ кратно 6; г) $(3n + 4)^2 - (4n + 3)^2$ кратно 7.

3. Сократите алгебраическую дробь:

а) $\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4};$

б) $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1};$

в) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4};$

г) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9};$

д) $\frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 16};$

е) $\frac{x^2 + 10x + 24}{x^2 - 36}.$

(Ответы: а) $\frac{x+2}{x-2}$; б) $\frac{x-1}{x+1}$; в) $\frac{x-3}{x+2}$; г) $\frac{x-2}{x+4}$; д) $\frac{x-2}{x+4}$; е) $\frac{x+4}{x-6}$.)

VII. Подведение итогов урока

Уроки 93–94. Разложение на множители суммы и разности кубов

Цель: использовать формулы суммы и разности кубов для разложения выражений на множители.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1) Найдите значение выражения:

а) $156^2 - 56^2;$

б) $\frac{49^2 - 28^2}{67^2 - 46^2}.$

2) Разложите многочлен на множители:

а) $a^4 - 16;$

б) $\frac{1}{9}b^4 - 4a^2.$

3) Решите уравнение: $\frac{1}{16}x^4 - 1 = 0.$

Вариант 2

1) Найдите значение выражения:

а) $155^2 - 45^2;$

б) $\frac{87^2 - 64^2}{75^2 - 52^2}.$

2) Разложите многочлен на множители:

а) $b^4 - 81;$

б) $\frac{1}{25}a^4 - 9b^2.$

3) Решите уравнение: $\frac{1}{81}y^4 - 1 = 0$.

III. Изучение нового материала

Приведем еще две формулы сокращенного умножения.

$$a^2 + b^2 = (a + b)(a^2 - ab + b^2), (1)$$

Это тождество называют формулой суммы кубов. Заметим, что выражение $a^2 - ab + b^2$ называют неполным квадратом разности a и b (отличается от полного квадрата разности $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ тем, что вместо удвоенного произведения чисел a и b стоит просто их произведение). По формуле (1) сумма кубов двух чисел (выражений) равна произведению суммы этих чисел (выражений a и b) и неполного квадрата их разности $a^2 - ab + b^2$ и выведем формулу (1) алгебраическим способом, преобразовав правую часть в левую.

Получаем, умножив два многочлена: $(a + b)(a^2 - ab + b^2) =$
 $= a(a^2 - ab + b^2) + b(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$.

Заметим, что формулу (1) можно получить и геометрическим способом, рассмотрев объемы параллелепипедов.

Формула разности кубов имеет аналогичный вид:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2), (2).$$

Разность кубов двух чисел (выражений) равна произведению разности этих чисел (выражений) $a - b$ и неполного квадрата их суммы $a^2 + ab + b^2$.

Тождество (2) можно получить аналогично формуле (1), умножив многочлены: $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a(a^2 + ab + b^2) - b(a^2 + ab + b^2) =$
 $= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$.

Формулу (2) можно получить непосредственно из выражения (1):

$$a^3 - b^3 = a^3 + (-b)^3 = (a + (-b))(a^2 - a(-b) + (-b)^2) = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Пример 1

Докажем, что выражение $123^3 + 27^3$ кратно 150.

Используем формулу (1) и получим $123^3 + 27^3 = (123 + 27) \cdot (123^2 - 123 \cdot 27 + 27^2) = 150 \cdot (123^2 - 123 \cdot 27 + 27^2)$. Видно, что данное выражение без остатка делится на 150.

Пример 2

Вычислим значение выражения $\frac{117^3 - 23^3}{94} + 117 \cdot 23$ без калькулятора.

Используем формулу (2) и формулу квадрата суммы. Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{117^3 - 23^3}{94} + 117 \cdot 23 &= \frac{(117 - 23)(117^2 + 117 \cdot 23 + 23^2)}{94} + 117 \cdot 23 = \\ &= \frac{94 \cdot (117^2 + 117 \cdot 23 + 23^2)}{94} + 117 \cdot 23 = 117^2 + 117 \cdot 23 + 23^2 + 117 \cdot 23 = \\ &= 117^2 + 2 \cdot 117 \cdot 23 + 23^2 = (117 + 23)^2 = 140^2 = 19600. \end{aligned}$$

Пример 3

Разложим на множители двучлен $8m^3 + n^3$.

Применим формулу (1) и получим: $8m^3 + n^3 = (2m)^3 + n^3 =$
 $= (2m + n) \cdot (2m)^2 - 2m \cdot n + n^2 = (2m + n)(4m^2 - 2mn + n^2).$

Пример 4

Разложим на множители выражение $64a^3 - 27b^6$.

Представим величины $64a^3$ и $27b^6$ в виде кубов величин $4a$ и $3b^2$.

Используем формулу: $64a^3 - 27b^6 = (4a)^3 - (3b^2)^3 =$
 $= (4a - 3b^2)((4a)^2 + 4a \cdot 3b^2 + (3b^2)^2) = (4a - 3b^2)(16a^2 + 12ab + 9b^4).$

Пример 5

Докажем, что при всех натуральных n значение выражения $(3n+2)^3 + (4n+5)^3$ кратно 7.

Применим формулу (1) и получим: $(3n+2)^3 + (4n+5)^3 =$
 $= ((3n+2) + (4n+5)) \cdot ((3n+2)^2 + (3n+2)(4n+5) + (4n+5)^2) =$
 $= (7n+7) \cdot ((3n+2)^2 - (3n+2)(4n+5) + (4n+5)^2) =$
 $= 7 \cdot (n+1) \cdot ((3n+2)^2 - (3n+2)(4n+5) + (4n+5)^2).$

Видно, что данное выражение имеет множитель 7, поэтому оно кратно 7.

Пример 6

Упростим выражение $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2) + (a+b) \cdot (a^2-ab+b^2)$.

Используем формулы (2) и (1), соответственно, и получим:

$$\begin{aligned} (2a-b)(4a^2+2ab+b^2) + (a+b)(a^2-ab+b^2) &= (2a)^3 - b^3 + a^3 + b^3 = \\ &= 8a^3 + a^3 = 9a^3. \end{aligned}$$

IV. Задание на уроке

№ 961 (а); 962 (в); 963 (д); 965 (а, б); 966 (б, г); 967 (а, б); 968 (а, д); 969 (а); 970 (а).

V. Контрольные вопросы

- Напишите формулу суммы кубов. Дайте ее словесную формулировку.
- Выведите формулу суммы кубов алгебраическим способом.
- Напишите формулу разности кубов. Дайте ее словесную формулировку.
- Выведите формулу разности кубов алгебраическим способом.

VI. Задание на дом

№ 961 (б, в); 962(а, г); 963 (г, с); 964 (а, с); 965 (а, г); 966 (а, в); 967 (в); 968 (б); 969 (б); 970 (а).

VII. Подведение итогов урока**Урок 95. Куб суммы и куб разности**

Цель: использование формул для возведения в куб суммы или разности чисел (выражений).

Ход урока**I. Сообщение темы и цели урока****II. Повторение и закрепление пройденного материала**

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

- 1) Напишите формулу суммы кубов. Дайте ее словесную формулировку.
- 2) Разложите на множители многочлен:
а) $8a^3 - 27b^6$; б) $64a^6 + 8b^{12}$.
- 3) Докажите, что при всех натуральных n выражение $(2n+3)^3 + (3n+2)^3$ кратно 5.

Вариант 2

- 1) Напишите формулу суммы кубов. Дайте ее словесную формулировку.
- 2) Разложите на множители многочлен:
а) $27a^3 - 64b^6$; б) $8a^6 + 125b^{12}$.
- 3) Докажите, что при всех натуральных n выражение $(3n+4)^3 + (2n+1)^3$ кратно 5.

III. Изучение нового материала

Приведем еще две формулы сокращенного умножения, позволяющие возводить в куб сумму или разность двух чисел (выражений).

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, (1)$$

Тождество (1) называют формулой куба суммы. В соответствии с ней, куб суммы двух чисел равен кубу первого числа плюс утроенное произведение квадрата первого числа на второе плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго плюс куб второго числа.

Получим формулу (1) алгебраическим способом.

Используем свойства степеней и формулу квадрата суммы. Тогда

$$\begin{aligned} \text{имеем: } (a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) = \\ &= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = \\ &= a^3 + (2a^2b + a^2b) + (ab^2 + 2ab^2) + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \end{aligned}$$

Заметим, что формула (1) может быть получена и геометрическим способом. Для этого необходимо рассмотреть объемы параллелепипедов.

Вид, аналогичный формуле (1), имеет формула куба разности:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, (2)$$

По тождеству (2) куб разности двух чисел равен кубу первого числа минус утроенное произведение квадрата первого числа на второе плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго минус куб второго числа.

$$\begin{aligned} \text{Формула (2) выводится подобно формуле (1): } (a-b)^3 &= (a-b)(a-b)^2 = \\ &= (a-b)(a^2 - 2ab + b^2) = a(a^2 - 2ab + b^2) - b(a^2 - 2ab + b^2) = \\ &= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 = a^3 + (-2a^2b - a^2b) + (ab^2 + 2ab^2) - b^3 = \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \end{aligned}$$

Заметим, что формула (2) может быть непосредственно получена из формулы (1): $(a-b)^3 = (a+(-b))^3 = a^3 + 3a^2 \cdot (-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 =$
 $= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$

Пример 1

Возведем в куб число 101.

Используем формулу (1) и получим:

$$101^3 = (100 + 1)^3 = 100^3 + 3 \cdot 100^2 \cdot 1 + 3 \cdot 100 \cdot 1^2 + 1^3 = 1000000 + 30000 + 300 + 1 = 1030301.$$

Пример 2

Возведем в куб число 99.

Применяя формулу (2), найдем:

$$99^3 = (100 - 1)^3 = 100^3 - 3 \cdot 100^2 \cdot 1 + 3 \cdot 100 \cdot 1^2 - 1^3 = 1000000 - 30000 + 300 - 1 = 970299.$$

Пример 3

Двучлен $2a + 3b$ возведем в третью степень.

По формуле (1) получаем:

$$\begin{aligned}(2a + 3b)^3 &= (2a)^3 + 3 \cdot (2a)^2 \cdot 3b + 3 \cdot 2a \cdot (3b)^2 + (3b)^3 = \\ &= 8a^3 + 3 \cdot 4a^2 \cdot 3b + 3 \cdot 2a \cdot 9b^2 + 27b^3 = 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3.\end{aligned}$$

Пример 4

Найдем куб двучлена $a^3 - 2b^2$.

Используя формулу (2), получаем:

$$\begin{aligned}(a^3 - 2b^2)^3 &= (a^3)^3 - 3 \cdot (a^3)^2 \cdot 2b^2 + 3 \cdot a^3 \cdot (2b^2)^2 - (2b^2)^3 = \\ &= a^9 - 3a^6 \cdot 2b^2 + 3a^3 \cdot 4b^4 - 8b^6 = a^9 - 6a^6b^2 + 12a^3b^4 - 8b^6.\end{aligned}$$

Пример 5

Упростим выражение $(2a - b)^3 + b(b^2 + 12a^2)$.

Используем формулу (2) и раскроем скобки. Получаем:

$$\begin{aligned}(2a - b)^3 + b(b^2 + 12a^2) &= (2a)^3 - 3 \cdot (2a)^2 \cdot b + 3 \cdot 2a \cdot b^2 - b^3 + b^3 + 12a^2b = \\ &= 8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3 + b^3 + 12a^2b = 8a^3 + 6ab^2.\end{aligned}$$

Заметим, что формулы $(a + b)^2$ и $(a + b)^3$, $(a - b)^2$ и $(a - b)^3$ являются частными случаями формул $(a + b)^n$ и $(a - b)^n$ для $n = 2$ и $n = 3$ (бином Ньютона). Поэтому существуют определенные закономерности в этих формулах. Приведем еще раз формулы $(a + b)^n$ и $(a - b)^n$ для $n = 1, 2, 3$.

n	$(a + b)^n$	$(a - b)^n$
1	$a + b$	$a - b$
2	$a^2 + 2ab + b^2$	$a^2 - 2ab + b^2$
3	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Отметим закономерность этих формул:

1. При возведении суммы или разности двух чисел в n -ю степень получается однородный многочлен n -й степени, т. е. многочлен, состоящий из однучленов только n -й степени. Количество членов в многочлене равно $n + 1$. Например, при возведении $a + b$ в квадрат получается однородный многочлен второй степени, состоящий из трех членов.

2. Получающийся однородный многочлен начинается с a^n . В следующем члене степень a уменьшается на единицу, но появляется множитель b . В следующем члене опять степень a уменьшается на единицу,

степень b увеличивается на единицу и т. д. до тех пор, пока степень b не будет равна n .

3. При такой записи получающегося многочлена крайние члены имеют коэффициенты 1, остальные члены — коэффициенты n (только при $n = 2, 3$). Например, при возведении в куб суммы $a + b$ коэффициенты последовательно равны 1, 3, 3, 1.

4. При возведении в n -ю степень суммы $a + b$ все коэффициенты имеют знак плюс. При возведении разности $a - b$ знаки коэффициентов чередуются, начиная со знака плюс.

Например, при возведении разности $a - b$ в куб коэффициенты последовательно равны 1; -3; 3; -1.

5. Все сказанное справедливо только при $n = 1, 2, 3$. Начиная с $n = 4$ закономерности становятся сложнее.

IV. Задание на уроке и дома

1. Используя соответствующие формулы, найдите:

а) 31^3 ; б) 28^3 ; в) 52^3 ; г) 49^3 .

(Ответы: а) 29791; б) 21952; в) 140608; г) 117649.)

2. Выполните возведение двучлена в куб:

а) $(x+1)^3$; б) $(a-1)^3$; в) $(x+3)^3$;
 г) $(b-2)^3$; д) $(2x-1)^3$; е) $(3a+2)^3$;
 ж) $(2b+3)^3$; з) $(3c-1)^3$; и) $(2a+3b)^3$;
 к) $(3a-2b)^3$; л) $(-a-b)^3$; м) $(-2a+b)^3$.

(Ответы:

а) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$; б) $a^3 - 3a^2 + 3a - 1$;
 в) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$; г) $b^3 - 6b^2 + 12b - 8$;
 д) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$; е) $27a^3 + 54a^2 + 36a + 8$;
 ж) $8b^3 + 36b^2 + 54b + 8b^3$; з) $27c^3 - 27c^2 + 9c - 1$;
 и) $8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$; к) $27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 + 8b^3$;
 л) $-a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3$; м) $-8a^3 + 12a^2b - 6ab^2 + b^3$.)

3. Решите уравнение:

а) $(x+1)^3 - x^2(x+3) + 2 = 0$; б) $(x-2)^3 - x^2(x-6) - 4 = 0$;
 в) $(2x+1)^3 - 4x^2(2x+3) - 7 = 0$; г) $(2x-3)^3 - 4x^2(2x-9) = 0$;
 д) $(1-2x)^3 - 12x^2 + 8x^3 = 0$; е) $(-x-1)^3 + x^3 + 3x^2 = 0$.

(Ответы: а) $x = -1$; б) $x = 1$; в) $x = 1$; г) $x = \frac{1}{2}$; д) $x = \frac{1}{6}$; е) $x = -\frac{1}{3}$.)

V. Контрольные вопросы

- Напишите формулу куба суммы. Сформулируйте ее словами.
- Выведите формулу куба суммы алгебраическим способом.
- Напишите формулу куба разности. Дайте ее словесную формулировку.
- Получите формулу куба разности алгебраическим способом.

VI. Подведение итогов урока

**Уроки 96–97. Контрольная работа № 7
по теме «Квадрат суммы и разности. Разность квадратов.
Сумма и разность кубов»**

Контрольная работа составлена в шести вариантах (варианты 1, 2 – самые простые; 3, 4 – средней сложности; варианты 5, 6 – самые сложные). Степень сложности меняется не слишком резко. Поэтому можно рекомендовать следующий критерий оценки: при решении вариантов 1, 2 оценка 3 ставится за любые три решенные задачи, оценка 4 – за четыре задачи и оценка 5 – за пять задач. Одна задача дает школьникам некоторую свободу выбора. При тех же критериях оценки за решение вариантов 3, 4 добавляется к набранным баллам дополнительно 0,5 балла; за решение вариантов 5, 6 – дополнительно 1,0 балла (то есть оценка 5 ставится уже за 4 задачи). Все задачи в варианте примерно равноценны. Может быть несколько тяжелее задачи 5, 6.

Перед проведением контрольной работы учащихся целесообразно ознакомить с критериями оценки и разной сложностью вариантов. Выбор вариантов может быть осуществлен учителем или предоставлен учащимся (в этом случае предполагается наличие конировальной техники в школе и избыточное количество заданий работы). После урока-разбора контрольной решение всех задач шести вариантов может быть вывешено на стенде. Разумеется, разобрать такое количество задач на уроке невозможно (да и не нужно).

Вариант 1

- 1) Запишите в виде многочлена стандартного вида:
а) $(2a - 3b)^2$; б) $(a + 2b)(a^2 - 2ab + 4b^2)$.
- 2) Разложите многочлен на множители:
а) $4a^2 - 9b^2$; б) $-4x^2 + 8x - 4$.
- 3) Решите уравнение: $(2x - 1)^2 = (2x + 3)(2x - 3)$.
- 4) Докажите неравенство: $4x^2 + y^2 > 4xy - 5$.

5) Сократите дробь: $\frac{24^2 - 11^2}{49^2 - 36^2}$.

6) Разложите на множители многочлен: $x^{2n+1} + 2x^{n+1} + x$.

Вариант 2

1) Запишите в виде многочлена стандартного вида:

а) $(3a + 4b)^2$; б) $(2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2)$.

2) Разложите многочлен на множители:

а) $9a^2 - 16b^2$; б) $-5x^2 + 10x - 5$.

3) Решите уравнение: $(2x + 3)^2 = (2x - 5)(2x + 5) - 2$.

4) Докажите неравенство: $9x^2 + y^2 > 6xy - 3$.

5) Сократите дробь: $\frac{34^2 - 21^2}{69^2 - 56^2}$.

6) Разложите на множители многочлен: $y^{2n+1} - 2y^{n+1} + y$.

Вариант 3

1) Запишите в виде многочлена стандартного вида:

а) $(4a^2 - 3b)^2$; б) $(2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$.

2) Разложите многочлен на множители:

а) $16b^4 - 25a^2$; б) $-4x^4 + 8x^2 - 4$.

3) Решите уравнение: $(3x - 2)^2 = (2x + 1)(2x - 1) + 5x^2 - 7$.

4) Докажите неравенство: $4x^2 + 9y^2 > 12xy - 0,1$.

5) Докажите, что число $-4x^4 + 8x^2 - 4$ кратно 4 и 9.

6) Разложите на множители многочлен: $x^{2n} + 6x^n y^4 + 9y^{2k}$.

Вариант 4

1) Запишите в виде многочлена стандартного вида:

а) $(5a - 4b^2)^2$; б) $(3a - 2b)(9a^2 + 6ab + 4b^2)$.

2) Разложите многочлен на множители:

а) $25a^2 - 9b^4$; б) $-3x^4 + 6x^2 - 3$.

3) Решите уравнение: $(5x - 3)^2 = (4x + 3)(4x - 3) + 9x^2 + 3$.

4) Докажите неравенство: $25x^2 + 16y^2 > 40xy - 0,2$.

5) Докажите, что число $-16^4 - 232^2$ кратно 4 и 6.

6) Разложите на множители многочлен: $4x^{2n} - 4x^n y^4 + y^{2k}$.

Вариант 5

1) Запишите в виде многочлена стандартного вида:

$$(x+2)^3 + (2x-1)(4x^2 + 2x + 1).$$

2) Разложите на множители многочлен: $4a^2 + 4ab^2 + b^4 - a^4$.

3) Решите уравнение: $(x+1)^3 = x^2(x+1)$.

4) Найдите наименьшее значение выражения: $a^2 + 6ab + 10b^2 - 2b + 3$.

При каких значениях a и b оно достигается?

5) Вычислите: $\frac{53^2 - 31^2 - 43^2 + 41^2}{73^2 - 2 \cdot 73 \cdot 63 + 63^2}$.

6) Разложите на множители многочлен: $x^{2n+5} - 6x^{n+5} + 9x^5$.

Вариант 6

1) Запишите в виде многочлена стандартного вида:

$$(x-1)^3 + (2x+3)(4x^2 - 6x + 9).$$

2) Разложите на множители многочлен: $9a^2 + 6ab^2 + b^4 - a^4$.

3) Решите уравнение: $(x-1)^3 = x^2(x-1)$.

4) Найдите наименьшее значение выражения: $a^2 - 8ab + 17b^2 + 2b + 4$.

При каких значениях a и b оно достигается?

5) Вычислите: $\frac{67^2 - 35^2 - 57^2 + 45^2}{84^2 - 2 \cdot 84 \cdot 74 + 74^2}$.

6) Разложите на множители многочлен: $y^{2n+3} - 4y^{n+3} + 4y^3$.

Урок 98. Анализ контрольной работы

I. Подведение итогов контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Удобно данные заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

Итоги	№ задачи				
	1	2	3	...	6
+	5				
±	1				
-	1				
∅	1				

Обозначения:

++ — число решивших задачу правильно или почти правильно;

± — число решивших задачу со значительными погрешностями;

- — число не решивших задачу;

∅ — число не решавших задачу.

Варианты 1, 2 — 8 учащихся.

2. Типичные ошибки при решении задач.
3. Задачи, вызывавшие наибольшие трудности, и их разбор (учителем или школьниками, решившими эту задачу).

II. Разбор задач вариантов

Вариант 1

1. Ответ:

а) $4a^2 - 12ab + 9b^2$;

б) $a^3 + 8b^3$.

2. Ответ:

а) $(2a - 3b)(2a + 3b)$;

б) $-4(x - 1)^2$.

3. Ответ: $x = 2, 5$.

4. Ответ: доказано.

5. Ответ: $\frac{7}{17}$.

6. Ответ: $x(x^n + 1)^2$.

Вариант 2

1. Ответ:

а) $9a^2 + 24ab + 16b^2$;

б) $8a^3 - b^3$.

2. Ответ:

а) $(3a - 4b)(3a + 4b)$;

б) $-5(x - 1)^2$.

3. Ответ: $x = 3$.

4. Ответ: доказано.

5. Ответ: $\frac{11}{25}$.

6. Ответ: $y(y^n - 1)^2$.

Вариант 3

1. Ответ:

а) $16a^4 - 24a^2b + 9b^2$;

б) $8a^3 + 27b^3$.

2. Ответ:

а) $(4b^2 - 5a)(4b^2 + 5a)$;

б) $-4(x - 1)^2 \cdot (x + 1)^2$.

3. Ответ: $x = 1$.

4. Ответ: доказано.

5. Ответ: доказано.

6. Ответ: $(x^n + 3y^k)^2$.

Вариант 4

1. Ответ:

а) $25a^4 - 40ab + 16b^4$;

б) $27a^3 - 8b^3$.

2. Ответ:

$$\text{а) } (5a - 3b^2)(5a + 3b^2); \quad \text{б) } -3(x-1)^2 \cdot (x+1)^2.$$

3. Ответ: $x = 0,5$.

4. Ответ: доказано.

5. Ответ: доказано.

6. Ответ: $(2x^8 - y^4)^2$.

Вариант 5

1) Используем формулы для куба суммы и разности кубов. Получим:

$$\begin{aligned} (x+2)^3 + (2x-1)(4x^2 + 2x + 1) &= x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 + 2^3 + (2x)^3 - 1^3 = \\ &= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 + 8x^3 - 1 = 9x^3 + 6x^2 + 12x + 7. \end{aligned}$$

Ответ: $9x^3 + 6x^2 + 12x + 7$.

2) Учтем формулы для квадрата суммы и разности квадратов:

$$\begin{aligned} 4a^2 + 4ab^2 + b^4 - a^4 &= (4a^2 + 4ab^2 + b^4) - a^4 = (2a + b^2)^2 - (a^2)^2 = \\ &= (2a + b^2 - a^2)(2a + b^2 + a^2). \end{aligned}$$

Ответ: $(2a + b^2 - a^2)(2a + b^2 + a^2)$.

3) Перенесем члены уравнения в левую часть и разложим ее на множители: $(x+1)^3 = x^2(x+1)$ или $(x+1)^3 - x^2(x+1) = 0$, или $(x+1) \cdot ((x+1)^2 - x^2) = 0$, или $(x+1)(x+1-x)(x+1+x) = 0$, или $(x+1)(2x+1) = 0$.

Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $x+1=0$ (корень $x=-1$) и $2x+1=0$ (корень $x=-\frac{1}{2}$).

Ответ: $x=-1$ и $x=-\frac{1}{2}$.

4) Сгруппируем члены выражения и используем формулы квадрата суммы и разности. Получаем: $a^2 + 6ab + 10b^2 - 2b + 3 =$

$$= (a^2 + 6ab + 9b^2) + (b^2 - 2b + 1) + 2 = (a + 3b)^2 + (b - 1)^2 + 2.$$

Так как квадрат любого выражения неотрицателен, то наименьшее значение данного выражения равно 2. Оно достигается при условии $a + 3b = 0$ и $b - 1 = 0$, т. е. при $b = 1$ и $a = -3b = -3$.

Ответ: 2 при $a = -3$ и $b = 1$.

5) Сгруппируем члены в числителе и используем формулы разности квадратов. В знаменателе учтем формулу квадрата разности. Получаем:

$$\frac{53^2 - 31^2 - 43^2 + 41^2}{73^2 - 2 \cdot 73 \cdot 63 + 63^2} = \frac{(53^2 - 43^2) + (41^2 - 31^2)}{(73 - 63)^2} = \frac{96 \cdot 10 + 72 \cdot 10}{10^2} =$$

$$= \frac{10(96 + 72)}{10^2} = \frac{168}{10} = 16,8.$$

Ответ: 16,8.

б) Вынесем за скобки x^5 и учтем формулу квадрата разности. Имеем: $x^{2n+5} - 6x^{n+5} + 9x^5 = x^5(x^{2n} - 6x^n + 9) = x^5(x^n - 1)^2$.

Ответ: $x^5(x^n - 1)^2$.

Вариант 6

1) Используем формулы для куба суммы и разности кубов. Получим:

$$(x-1)^3 + (2x+3)(4x^2 - 6x + 9) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + (2x)^3 + 3^3 =$$

$$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 8x^3 + 27 = 9x^3 - 3x^2 + 3x + 26.$$

Ответ: $9x^3 - 3x^2 + 3x + 26$.

2) Учтем формулы для квадрата суммы и разности квадратов:

$$9a^2 + 6ab^2 + b^4 - a^4 = (9a^2 + 6ab^2 + b^4) - a^4 = (3a + b^2)^2 - (a^2)^2 =$$

$$= (3a + b^2 - a^2)(3a + b^2 + a^2).$$

Ответ: $(3a + b^2 - a^2)(3a + b^2 + a^2)$.

3) Перенесем члены уравнения в левую часть и разложим ее на множители: $(x-1)^3 = x^2(x-1)$ или $(x-1)^3 - x^2(x-1) = 0$, или $(x-1)(x-1)^2 - x^2 = 0$, или $(x-1)(x-1-x)(x-1+x) = 0$, или $(x-1)(2x-1) = 0$.

Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $x-1=0$ (корень $x=1$) и $2x-1=0$ (корень $x=\frac{1}{2}$).

Ответ: $x=1$ и $x=\frac{1}{2}$.

4) Сгруппируем члены выражения и используем формулы квадрата суммы и разности. Получаем: $a^2 - 8ab + 17b^2 + 2b + 4 =$

$$= (a^2 - 8ab + 16b^2) + (b^2 + 2b + 1) + 3 = (a - 4b)^2 + (b + 1)^2 + 3.$$

Так как квадрат любого выражения неотрицателен, то наименьшее значение данного выражения равно 3. Оно достигается при условии $a - 4b = 0$ и $b + 1 = 0$, т. е. при $b = -1$ и $a = 4b = -4$.

Ответ: 3 при $a = -4$ и $b = -1$.

5) Сгруппируем члены в числителе и используем формулы разности квадратов. В знаменателе учтем формулу квадрата разности. Получаем:

$$\frac{67^2 - 35^2 - 57^2 + 45^2}{84^2 - 2 \cdot 84 \cdot 74 + 74^2} = \frac{(67^2 - 57^2) + (45^2 - 35^2)}{(84 - 74)^2} = \frac{124 \cdot 10 + 80 \cdot 10}{10^2} =$$

$$= \frac{10(124 + 80)}{10^2} = \frac{204}{10} = 20,4.$$

Ответ: 20,4.

6) Вынесем за скобки y^3 и учтем формулу квадрата разности. Имеем: $y^{2n+3} - 4y^{n+3} + 4x^3 = y^3(y^{2n} - 4y^n + 4) = y^3(y^n - 2)^2$.

Ответ: $y^3(y^n - 2)^2$.

§ 14. Преобразование целых выражений

Урок 99. Преобразование целого выражения в многочлен

Цель: ознакомить с понятием целого выражения; отработать навыки преобразования целого выражения в многочлен.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

Выражения, составленные из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения (при этом возведение в натуральную степень рассматривается как умножение) и скобок, называются целыми. В таких выражениях возможно и деление на число, не равное нулю. Очевидно, что одночлены и многочлены являются целыми выражениями.

Пример 1

Целыми выражениями являются:

а) $0,7x^2yz^6$, так как данное выражение одночлен;

б) $2,1a^3b^2 - 3,7xyz + 8,3x^2$, так как данное выражение многочлен;

в) $(3a + 2b)(x + y) - (2a^2 + x)(b + 2y)$, так как в данное выражение входят произведения многочленов $3a + 2b$ и $x + y$, $2a^2 + x$ и $b + 2y$ (как известно, такое произведение также является многочленом) и разность этих произведений (разность многочленов также будет многочленом);

г) $(2a^2 + 3bc)^3$, так как натуральная степень многочлена также является многочленом;

д) $\frac{2a(3a+4b)}{5}$, так как деление на число 5 можно заменить умножением на число $\frac{2}{5}a$ и многочлена $3a+4b$. Такое произведение является многочленом.

Пример 2

Выражения не являются целыми:

а) $2a + \frac{5}{a-3}$, так как содержит деление на выражение $a-3$ с переменной;

б) $\frac{3a}{(a+1)^2}$, так как это выражение можно записать в виде $\frac{3a}{a^2+2a+1}$, и оно также содержит деление на выражение a^2+2a+1 с переменной.

в) $\frac{2a^2+3b}{3b^2-5ab}$, так как содержит деление на выражение $3b-5ab$ с переменными.

Любое целое выражение путем преобразований можно представить в виде многочлена.

Пример 3

Представим в виде многочлена выражение

$$(x-2)(x+2) - (x+1)(x^2-x+1) + x(x^2+1).$$

Используя формулы сокращенного умножения, раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем:

$$\begin{aligned} (x-2)(x+2) - (x+1)(x^2-x+1) + x(x^2+1) &= x^2 - 2^2 - (x^3 + 1^3) + x^3 + x = \\ &= x^2 - 4 - x^3 - 1 + x^3 + x = x^2 + x - 5. \end{aligned}$$

В результате преобразований получился многочлен второй степени.

Пример 4

Представим в виде многочлена выражение $(2a+3b)^2 - 4a(a+2b)$.

Используя формулу квадрата суммы, умножая одночлен и многочлен и приводя подобные члены, имеем: $(2a+3b)^2 - 4a(a+2b) =$
 $= 4a^2 + 12ab + 9b^2 - 4a^2 - 8ab = 4ab + 9b^2$.

В результате преобразований получен многочлен второй степени.

III. Задание на уроке

№ 976 (а, в, д); 977 (в, е); 978 (а, в); 980 (а); 981 (а, в); 982 (а); 983 (а); 984 (а); 985 (а).

IV. Контрольные вопросы

– Какое выражение называется целым?

– Будет ли целым выражение:

- сумма (разность) одночленов, многочленов;
- произведение одночленов, многочленов;
- натуральная степень одночлена, многочлена;
- частное от деления одночленов, многочленов?

Приведите примеры.

V. Задание на дом

№ 976 (б, г, е); 977 (а, г); 978 (б, г); 979 (в, г); 980 (б); 981 (б, г); 982 (б); 983 (б); 984 (б); 985 (б).

VI. Подведение итогов урока

Урок 100. Применение различных способов для разложения на множители

Цель: отработать навыки разложения выражений на множители.

Ход урока**I. Сообщение темы и цели урока****II. Повторение и закрепление пройденного материала**

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1) Является ли целым выражением сумма одночленов, многочленов? Приведите примеры.

2) Упростите выражение $(3a - 2b)(3a + 2b) - (3a - 4b)^2 + 20b^2$.

3) Представьте в виде многочлена выражение:
 $(a + 2)(a^2 + 4)(a^4 + 16)(a - 2)$.

Вариант 2

1) Является ли целым выражением частное от деления одночленов, многочленов? Приведите примеры.

2) Упростите выражение $(2a - 3b)(2a + 3b) - (2a - 5b)^2 + 34b^2$.

3) Представьте в виде многочлена выражение:

$$(a-3)(a^2+9)(a^4+81)(a+3).$$

III. Изучение нового материала

При разложении на множители многочленов ранее уже использовались три основных способа:

- 1) вынесение общего множителя за скобки;
- 2) группировка членов, имеющих общий множитель;
- 3) применение формул сокращенного умножения.

В основном, при разложении на множители используются сочетания указанных способов. При этом преобразования выражений надо начинать (если это возможно) с наиболее простого способа вынесения общего множителя.

Пример 1

Разложим на множители многочлен $5a - 40a^4$.

Видно, что члены многочлена имеют общий множитель $5a$. Вынесем его за скобки: $5a - 40a^4 = 5a(1 - 8a^3)$.

Многочлен $1 - 8a^3$ представляет собой разность кубов числа 1 и одночлена $2a$ и также может быть разложен на множители:

$$1 - 8a^3 = 1^3 - (2a)^3 = (1 - 2a)(1 + 2a + 4a^2).$$

Таким образом, данный многочлен имеет вид:

$5a - 40a^4 = 5a(1 - 2a)(1 + 2a + 4a^2)$, т. е. многочлен разложен на произведение одночлена $5a$ и многочленов $1 - 2a$ и $1 + 2a + 4a^2$.

Пример 2

Разложим на множители многочлен $12x^3 - 12x^2 + 3x$.

Все члены многочлена имеют общий множитель $3x$. Вынесем его за скобки: $12x^3 - 12x^2 + 3x = 3x(4x^2 - 4x + 1)$.

Многочлен $4x^2 - 4x + 1$ является квадратом двучлена $2x - 1$, т. е. $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$. Поэтому данный многочлен имеет вид:

$12x^3 - 12x^2 + 3x = 3x(2x - 1)^2$, т. е. многочлен разложен на произведение одночлена $3x$ и двух многочленов $2x - 1$ (или квадрата многочлена $2x - 1$).

Пример 3

Разложим на множители многочлен $2a^2x^2 + 6ax^2 - 2abx^2 - 6bx^2$.

Сначала вынесем за скобки общий множитель $2x - 1$ и получим: $2a^2x^2 + 6ax^2 - 2abx^2 - 6bx^2 = 2x^2(a^2 + 3a - ab - 3b)$.

Теперь разложим на множители многочлен $a^2 + 3a - ab - 3b$. Для этого сгруппируем первый член с третьим и второй член с четвертым. Получаем: $a^2 + 3a - ab - 3b = (a^2 - ab) + (3a - 3b) = a(a - b) + 3(a - b) = (a - b)(a + 3)$.

Тогда данный многочлен имеет вид: $2a^2x^2 + 6ax^2 - 2abx^2 - 6bx^2 = 2x^2(a - b)(a + 3)$, т. е. многочлен разложен на произведение одночлена $2x^2$ и многочленов $a - b$ и $a + 3$.

Пример 4

Разложим на множители многочлен $12ax + 36 - 4a^2 - 9x^2$.

Сгруппируем первый, третий и четвертый члены многочлена $36 + (12ax - 4a^2 - 9x^2)$. Из второго слагаемого вынесем общий множитель -1 и получим: $36 - (4a^2 - 12ax + 9x^2)$. Выражение в скобках является квадратом разности. Поэтому имеем: $6^2 - (2a - 3x)^2$. Используем формулу разности квадратов и разложим выражение на множители: $(6 - (2a - 3x)) \cdot (6 + (2a - 3x)) = (6 - 2a + 3x)(6 + 2a - 3x)$.

Тогда данный многочлен можно записать в виде:

$12ax + 36 - 4a^2 - 9x^2 = (6 - 2a + 3x)(6 + 2a - 3x)$, т. е. многочлен разложен на произведение двух многочленов $6 - 2a + 3x$ и $6 + 2a - 3x$.

Напомним, что иногда для разложения многочлена на множители некоторые его члены удобно представить в другом виде или ввести дополнительные члены.

Пример 5

Разложим на множители многочлен $x^3 - x^2 - 2x$.

Прежде всего, вынесем общий множитель x за скобки:

$x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2)$. Теперь разложим на множители квадратный трехчлен $x^2 - x - 2$. Для этого последний член -2 представим в виде $-2 = -1 - 1$ и выполним группировку членов: $x^2 - x - 2 = x^2 - x - 1 - 1 = (x^2 - 1) + (-x - 1) = (x^2 - 1) - (x + 1)$.

Используя формулу разности квадратов, разложим первое слагаемое на множители: $(x^2 - 1) - (x + 1) = (x - 1)(x + 1) - (x + 1) = (x + 1)(x - 1 - 1) = (x + 1)(x - 2)$.

Поэтому данный многочлен имеет вид: $x^3 - x^2 - 2x = x(x + 1)(x - 2)$, т. е. многочлен разложен на произведение одночлена x и двух двучленов $x + 1$ и $x - 2$.

Пример 6

Разложим на множители многочлен $x^4 + x^2 + 1$.

Для разложения данного многочлена на множители дополним его до квадрата суммы. Для этого прибавим к нему x^2 . Получаем: $x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + x^2 + 1 + x^2) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x) = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$.

Таким образом, данный многочлен имеет вид:

$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$, т. е. многочлен четвертой степени разложен на произведение двух многочленов второй степени $x^2 - x + 1$ и $x^2 + x + 1$.

Заметим, что разложение многочлена на множители подразумевает его представление в виде произведения нескольких многочленов. При этом хотя бы два множителя должны быть многочленами ненулевой степени (т. е. не быть числами). Так как при разложении многочленов на множители школьники часто допускают ошибки, то рассмотрим еще один пример.

Пример 7

Рассмотрим еще раз квадратный трехчлен $x^2 - x - 2$ из примера 5. Его разложением будет представление $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$ в виде произведения двух многочленов первой степени $x + 1$ и $x - 2$. Очень часто в работах школьников встречаются «разложения» на множители:

а) $x^2 - x - 2 = 2 \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - 1 \right)$ — не является разложением, так как один из двух множителей — число 2 (многочлен нулевой степени);

б) $x^2 - x - 2 = x(x - 1) - 2$ — не является разложением, так как не является произведением множителей (из произведения $x(x - 1)$ вычитается число 2);

в) $x^2 - x - 2 = x \left(x - 1 - \frac{2}{x} \right)$ — не является разложением, так как множитель $x - 1 - \frac{2}{x}$ не является многочленом.

Не каждый многочлен может быть разложен на множители. Например, нельзя разложить на множители многочлены $2x^2 + 4$, $3x^2 + 5x + 3$ и т. д.

IV. Задание на уроке

№ 990 (б, д); 993; 994 (б); 995 (а, б); 999 (а, в); 1001 (а); 1004 (б); 1006 (а, г); 1008.

V. Контрольные вопросы

- Перечислите основные способы разложения многочленов на множители.
- Охарактеризуйте каждый способ разложения многочленов на множители.

VI. Задание на дом

№ 990 (г, з); 992 (а, в); 994 (а); 995 (в, г); 997; 998 (г); 1002 (б); 1004 (а); 1006 (б, в); 1007 (б); 1009.

Урок 101. Применение преобразований целых выражений

Цель: развить навыки преобразования целых выражений для решения различных алгебраических задач.

Ход урока**I. Сообщение темы и цели урока****II. Повторение и закрепление пройденного материала**

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1**1) Разложите на множители:**

а) $4x - xy^2$;

б) $4a^4 + 75b^2 - 120a^2b$;

в) $8 + x^3 + 2x^4 + 16x$.

2) Решите уравнение: $25y^4 - y^2 = 0$.**Вариант 2****1) Разложите на множители:**

а) $ab^2 - 16a$;

б) $32a^2 + 18b^4 - 48ab^2$;

в) $27x - 2x^3 + x^4 - 54$.

2) Решите уравнение: $4x^4 - x^2 = 0$.**III. Изучение нового материала**

Ранее преобразования целых выражений использовались для упрощения вычислений и решения уравнений. Разумеется, область применения тождественных преобразований гораздо шире. Рассмотрим другие примеры применения преобразования целых выражений.

Пример 1

Докажем, что выражение $A = (3 - 2a)^2 + 2(3 - 2a)(2a - 1) + (2a - 1)^2$ не зависит от переменной a , и найдем его значение.

Легко заметить, что в выражение A входят квадраты выражений. Поэтому используем формулу квадрата суммы и получим:

$$A = ((3-2a) + (2a-1))^2 = (3-2a+2a-1)^2 = 2^2 = 4.$$

Таким образом, выражение A не зависит от переменной a и равно 4.

Пример 2

Покажем, что при любом значении x значения многочлена $x^2 - 8x + 20$ больше 3.

В данном многочлене выделим квадрат разности. Для этого представим число 20 в виде суммы двух слагаемых $20 = 16 + 4$. Тогда многочлен имеет вид: $x^2 - 8x + 20 = (x^2 - 8x + 16) + 4 = (x-4)^2 + 4$. При всех значениях x значения выражения $(x-4)^2$ неотрицательны. Если к этому выражению прибавить число 4, то значения выражения $(x-4)^2 + 4$ будут больше или равны 4, а тем более, больше 3.

Пример 3

Докажем, что при всех целых значениях n значение выражения $(n+3)(n+5) - (n-1)(n+1)$ кратно 8.

Используя формулу разности квадратов, упростим данное выражение: $(n+3)(n+5) - (n-1)(n+1) = n^2 + 5n + 3n + 15 - (n^2 - 1) = n^2 + 8n + 15 - n^2 + 1 = 8n + 16 = 8(n+2)$.

Так как величина n является целым числом, то и $n+2$ — целое число. Поэтому при всех целых n значение выражения $8(n+2)$ кратно 8.

Пример 4

При каких значениях переменных x и y значение выражения $A = 2xy - 2x^2 - y^2 + 4x - 1$ наибольшее? Найдем это значение.

В данном выражении выделим квадраты суммы или разности. Прежде всего, в многочлене A вынесем за скобки множитель (-1) и получим: $A = -(-2xy + 2x^2 + y^2 - 4x + 1)$. Член $2x^2$ представим в виде суммы $2x^2 = x^2 + x^2$, число 1 — в виде разности $1 = 4 - 3$. Имеем: $A = -(-2xy + x^2 + y^2 + x^2 - 4x + 4 - 3) = -((x^2 - xy + y^2) + (x^2 - 4x + 4) - 3) = -(x-y)^2 + (x-2)^2 - 3 = 3 - (x-y)^2 - (x-2)^2$.

Многочлен A представлен в виде разности числа 3 и выражений $(x-y)^2$ и $(x-2)^2$. Очевидно, что при всех x и y эти выражения неотрицательны. Следовательно, многочлен A будет наибольшим, если вычитаемые $(x-y)^2$ и $(x-2)^2$ минимальны, т. е. $(x-y)^2 = 0$ и $(x-2)^2 = 0$.

Из этих условий получаем $x - y = 0$ и $x - 2 = 0$, откуда $x = y = 2$. Итак, наибольшее значение многочлена A равно 3 при $x = y = 2$.

Разумеется, преобразования целых выражений используются и в задачах на числа.

Пример 5

Докажем, что число $27^{23} - 15^{53}$ кратно 9 и 13.

Используем формулу разности кубов и преобразуем данное числовое выражение:

$$27^3 - 15^3 = (272 - 155) \cdot (272^2 + 272 \cdot 155 + 155^2) = 117 \cdot (272^2 + 272 \cdot 155 + 155^2).$$

Данное выражение является произведением числа 117 и числового выражения $272^2 + 272 \cdot 155 + 155^2$ (которое является натуральным числом). При этом число 117 кратно 9 и 13. Следовательно, данное число также кратно 9 и 13.

Пример 6

Является ли число $4 \cdot 100^6 + 1$ простым или составным?

Заметим, что первая цифра в записи этого числа 4, затем стоят 16 цифр 0 и последняя цифра 1. По признакам делимости это нечетное число не делится на четные числа 2, 4, 8, 10. Также оно не делится и на нечетные числа 3, 5 и 9. Поэтому для решения задачи использование признаков делимости ничего не даст.

Запишем данное число в виде $4 \cdot (100^2)^4 + 1 = 4 \cdot (10^4)^4 + 1$. Для удобства обозначим буквой a число 10^4 , т. е. $a = 10^4$. Тогда данное число имеет вид $4a^4 + 1$. Разложим этот многочлен на множители, прибавляя и вычитая

$$\text{выражение } 4a^2. \text{ Имеем: } 4a^4 + 1 = (4a^4 + 4a^2 + 1) - 4a^2 = (2a^2 + 1)^2 - (2a)^2 = \\ = (2a^2 + 1 - 2a) \cdot (2a^2 + 1 + 2a) = (2a^2 - 2a + 1) \cdot (2a^2 + 2a + 1).$$

Подставим в это произведение значение a и получим:

$$(2 \cdot (10^4)^2 - 2 \cdot 10^4 + 1) \cdot (2 \cdot (10^4)^2 + 2 \cdot 10^4 + 1).$$

Данное число представлено в виде произведения двух чисел, каждое из которых равно 2 и данному числу. Тогда по определению данное число является составным.

IV. Задание на уроке

№ 1014 (а, г); 1016 (а); 1018; 1020 (а); 1021 (а); 1022; 1023.

V. Задание на дом

№ 1014 (б, в); 1015; 1016 (б); 1017; 1019; 1020(б); 1021 (б); 1024.

VI. Подведение итогов урока

Уроки 102–103. Контрольная работа № 8 по теме «Формулы сокращенного умножения»

Контрольная работа составлена в 6 вариантах (варианты 1, 2 – самые простые; варианты 3, 4 – средней сложности; варианты 5, 6 – самые сложные). Степень сложности меняется не слишком резко. Поэтому можно рекомендовать следующий критерий оценки: при решении вариантов 1, 2 оценка «3» ставится за любые три решенные задачи, оценка «4» – за четыре задачи и оценка «5» – за пять задач. Одна задача даст школьникам некоторую свободу выбора. При тех же критериях оценки за решение вариантов 3, 4 добавляется к набранным баллам дополнительно 0,5 балла; за решение вариантов 5, 6 – дополнительно 1,0 балла (т. е. оценка «5» ставится уже за 4 задачи). Все задачи в варианте примерно равноценны. Может быть несколько тяжелее задачи 5, 6.

Перед проведением контрольной работы учащихся целесообразно ознакомить с критериями оценки и разной сложностью вариантов. Выбор вариантов может быть осуществлен учителем или предоставлен самим учащимся (в этом случае предполагается наличие копировальной техники в школе и избыточное количество заданий работы). После урока-разбора контрольной решение всех задач шести вариантов может быть вывешено на стенде. Разумеется, разобрать такое количество задач на уроке невозможно (да и не нужно).

Вариант 1

1. Запишите выражение в виде многочлена стандартного вида:

- а) $(2a - 3b)^2$;
- б) $(5x - 3y)(5x + 3y)$;
- в) $2a^3(a + 2b)^2$.

2. Разложите многочлен на множители:

- а) $25a^2 - 16$;
- б) $-3x^2 + 6x - 3$;
- в) $8x^3 + y^3$.

3. Решите уравнение: $(5x - 3)^2 - (5x - 1)(5x + 1) = 28x + 4$.

4. Докажите, что выражение $2x^2 - 4xy + 4y^2$ может принимать только неотрицательные значения.

5. Постройте график функции $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} - 3$.

6. Докажите, что число $14^4 - 145^2$ кратно 3 и 17.

Вариант 2

1. Запишите выражение в виде многочлена стандартного вида:

- а) $(3a - 2b)^2$; б) $(3x - 5y)(3x + 5y)$;
в) $3a^4(2a + b)^2$.

2. Разложите многочлен на множители:

- а) $9x^2 - 25$; б) $-3a^2 + 6a - 3$;
в) $y^3 - 8x^3$.

3. Решите уравнение: $(4x + 1)^2 - (4x + 3)(4x - 3) = 6x - 2$.

4. Докажите, что выражение $4x^2 - 4xy + 2y^2$ может принимать только неотрицательные значения.

5. Постройте график функции $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} + 3$.

6. Докажите, что число $15^4 - 168^2$ кратно 3 и 19.

Вариант 3

1. Запишите выражение в виде многочлена стандартного вида:

- а) $2a(3a^2 - 5b)^2$; б) $(2a - 3b^2)(4a^2 + 6ab^2 + 9b^4)$.

2. Разложите выражение на множители:

- а) $9(a + 2)^2 - 4$; б) $(a - 1)^3 + 8a^6$;
в) $(a - b^2) + 2(a - b)(a + 3) + (a + 3)^2$.

3. Решите уравнение: $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) - 8x(x^2 + 1) = 3x + 4$.

4. Найдите наименьшее значение выражения: $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 17$.

5. Постройте график функции $y = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} + x - 1$.

6. Докажите, что число $14^4 - 165^2 + 138^2 - 107^2$ кратно 31.

Вариант 4

1. Запишите выражение в виде многочлена стандартного вида:

- а) $2b(2a - 3b^2)^2$; б) $(3a^2 - b)(9a^4 + 3a^2b + b^2)$.

2. Разложите выражение на множители:

- а) $4(b - 3)^2 - 9$; б) $(a + 1)^3 - 8a^6$;
в) $(2a - b^2) - 2(2a - b)(a - 1) + (a - 1)^2$.

3. Решите уравнение: $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) - 4x(2x^2 - 1) = 5x - 2$.

4. Найдите наименьшее значение выражения: $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 19$.

5. Постройте график функции $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} + x + 1$.

6. Докажите, что число $15^4 - 186^2 + 173^2 - 134^2$ кратно 39.

Вариант 5

1. Запишите выражение в виде многочлена стандартного вида:

а) $(2a+3b)^3$;

б) $(a+b+2)^2$;

в) $(-3x-2y)(3x-2y)$.

2. Разложите выражение на множители:

а) $4(a+1)^2 - 9(a-1)^2$;

б) $4x^2 + 9y^2 - z^2 - 12xy$.

3. Решите уравнение: $(x+2)^3 - x^2(x+5) - (x-1)(x+1) = 0$.4. Найдите наибольшее значение выражения: $7 + 4xy - 2y^2 - 4x^2$.5. Постройте график функции $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x-1} + \frac{x^2 + 4x + 4}{x+2}$.6. При любом натуральном значении n найдите остаток от деления выражения $(n+1)(n+5) - (n-2)(n+2)$ на 6.**Вариант 6**

1. Запишите выражение в виде многочлена стандартного вида:

а) $(3a-2b)^3$;

б) $(2a+b+1)^2$;

в) $(-2x-5y)(2x-5y)$.

2. Разложите выражение на множители:

а) $9(a-2)^2 - 16(b+1)^2$;

б) $9x^2 + 16y^2 - 24xy - 9z^2$.

3. Решите уравнение: $(x-1)^3 - x^2(x-4) - (x-2)(x+2) = 0$.4. Найдите наибольшее значение выражения: $5 + 12xy - 5y^2 - 9x^2$.5. Постройте график функции $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x+1} + \frac{x^2 - 4x + 4}{x-2}$.6. При любом натуральном значении n найдите остаток от деления выражения $(n+2)(n+4) - (n-1)(n+1)$ на 6.**Урок 104. Анализ контрольной работы****1. Подведение итогов контрольной работы**

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Удобно данные занести в таблицу (для каждой пары вариантов).

Итоги	№ задачи				
	1	2	3	...	6
+	5				
±	1				
-	1				
∅	1				

Обозначения:

+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

 $\pm$ – число решивших задачу со значительными погрешностями;

-- число не решивших задачу;

 $\emptyset$ – число не решивших задачу.

Варианты 1, 2 – 8 учащихся.

2. Типичные ошибки при решении задач.

3. Задачи, вызвавшие наибольшие трудности, и их разбор (учителем или школьниками, решившими эту задачу).

II. Разбор задач вариантов**Вариант 1**1. *Ответ:*

а) $4a^2 - 12ab + 9b^2$; б) $25x^2 - 9y^2$; в) $2a^5 + 8a^4b + 8a^3b^2$.

2. *Ответ:*

а) $(5a - 4)(5a + 4)$; б) $-3(x - 1)^2$; в) $(2x + y)(4x^2 - 2y + y^2)$.

3. *Ответ:* $x = -3$.4. *Ответ:* доказано.

5.

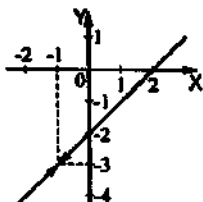


Рис. 2.12

6. *Ответ:* доказано.**Вариант 2**1. *Ответ:*

а) $9a^2 - 12ab + 4b^2$; б) $9x^2 - 25y^2$; в) $12a^6 + 12a^5b + 3a^4b^2$.

2. *Ответ:*

а) $(3x - 5)(3x + 5)$; б) $-3(a + 1)^2$; в) $(y - 2x)(y^2 + 2xy + 4x^2)$.

3. *Ответ:* $x = 6$.4. *Ответ:* доказано.

5.

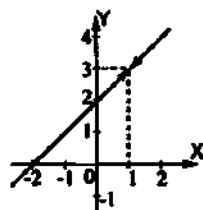


Рис. 2.13

6. *Ответ:* доказано.

Вариант 3

1. Ответ:

а) $18a^5 - 60a^3b + 50ab^2$; б) $8a^3 - 27b^6$.

2. Ответ:

а) $(3a+4)(3a+8)$; б) $(2a^2+a-1)(4a^4-2a^3+3a^2-2a+1)$;

в) $(2a-b+3)^2$.

3. Ответ: $x=1$.

4. Ответ: 7.

5.

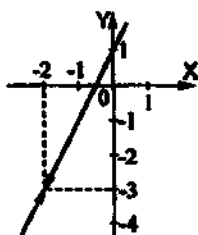


Рис. 2.14

6. Ответ: доказано.

Вариант 4

1. Ответ:

а) $12a^2b - 36ab^3 + 27b^5$; б) $27a^6 - b^3$.

2. Ответ:

а) $(2b-9)(2b-3)$; б) $(a+1-2a^2)(4a^4+2a^3+3a^2+2a+1)$;

в) $(a-b+1)^2$.

3. Ответ: $x=3$.

4. Ответ: 6.

5.

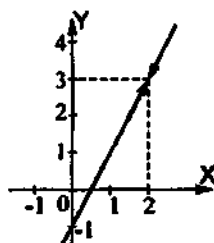


Рис. 2.15

6. Ответ: доказано.

Вариант 5

1. Используем формулы сокращенного умножения и преобразуем данное выражение в многочлен стандартного вида.

а) Применяя формулу куба суммы, получим:

$$(2a+3b)^3 = (2a)^3 + 3 \cdot (2a)^2 \cdot 3b + 3 \cdot 2a \cdot (3b)^2 + (3b)^3 = \\ = 8a^3 + 3 \cdot 4a^2 \cdot 3b + 3 \cdot 2a \cdot 9b^2 + 27b^3 = 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3.$$

б) В выражении $(a+b+2)^2$ будем рассматривать сумму $a+b$, как одно число и используем формулу квадрата суммы. Получаем:

$$(a+b+2)^2 = ((a+b)+2)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b) \cdot 2 + 2^2 = \\ = a^2 + 2ab + b^2 + 4a + 4b + 4.$$

в) В выражении $(-3x-2y)(3x-2y)$ вынесем множитель (-1) из первого сомножителя и применим формулу разности квадратов. Имеем:

$$(-3x-2y)(3x-2y) = -(3x+2y)(3x-2y) = ((3x)^2 - (2y)^2) = \\ = -(9x^2 - 4y^2) = 4y^2 - 9x^2.$$

Ответ:

а) $8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$;

б) $a^2 + 2ab + b^2 + 4a + 4b + 4$;

в) $4y^2 - 9x^2$.

2. Используем формулы сокращенного умножения и разложим выражение на множители.

а) Воспользуемся формулой разности квадратов и получим:

$$4(a+1)^2 - 9(b-1)^2 = 2^2 \cdot (a+1)^2 - 3^2 \cdot (b-1)^2 = (2(a+1))^2 - (3(b-1))^2 = \\ = (2a+2)^2 - (3b-3)^2 = ((2a+2) - (3b-3)) \cdot ((2a+2) + (3b-3)) = \\ = (2a+2-3b+3) \cdot (2a+2+3b-3) = (2a-3b+5)(2a+3b-1).$$

б) Сгруппируем члены в данном выражении и используем формулу квадрата разности и разности квадратов. Имеем:

$$4x^2 + 9y^2 - z^2 - 12xy = (4x^2 + 9y^2 - 12xy) - z^2 = (2x-3y)^2 - z^2 = \\ = (2x-3y-z)(2x-3y+z).$$

Ответ:

а) $(2a-3b+5)(2a+3b-1)$;

б) $(2x-3y-z)(2x-3y+z)$.

3. Преобразуем уравнение: $(x+2)^3 - x^2(x+5) - (x-1)(x+1) = 0$.

Для этого используем формулы куба суммы и разности квадратов и получим: $x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 + 2^3 - x^3 - 5x^2 - (x^2 - 1) = 0$ или $6x^2 + 12x + 8 - 5x^2 - x^2 + 1 = 0$.

Приведем подобные члены: $12x + 9 = 0$.

Решая это линейное уравнение, находим $x = -\frac{9}{12} = -\frac{3}{4}$.

Ответ: $x = -\frac{3}{4}$.

4. В данном выражении выделим квадрат разности. Для этого член $-2y^2$ представим в виде $-y^2 - y^2$ и сгруппируем члены. Получаем: $7 + 4xy - 2y^2 - 4x^2 = 7 - y^2 - y^2 + 4xy - 4x^2 =$
 $= 7 - y^2 + (-y^2 + 4xy - 4x^2) = 7 - y^2 - (y^2 - 4xy + 4x^2) =$
 $= 7 - y^2 - (y - 2x)^2$.

Данное выражение представляет собой разность числа 7 и двух неотрицательных величин y^2 и $(y - 2x)^2$. Очевидно, что данное выражение будет наибольшим, если вычитаемые величины минимальны (т. е. равны нулю), откуда $y = 0$ и $y - 2x = 0$ (тогда $x = \frac{y}{2} = 0$).

Итак, при $x = y = 0$ данное выражение имеет наибольшее значение равное 7.

Ответ: 7.

5. Для построения графика функции $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} + \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$ учтем, что знаменатели дробей не равны нулю (т. е. $x - 1 \neq 0$ и $x + 2 \neq 0$), откуда $x \neq 1$ и $x \neq -2$. Числитель первой дроби является квадратом разности, числитель второй дроби – квадратом суммы. Поэтому можно сократить дроби. Получаем:

$$y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} + \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} = \frac{(x - 1)^2}{x - 1} + \frac{(x + 2)^2}{x + 2} = x - 1 + x + 2 = 2x + 1.$$

Итак, строим график линейной функции $y = 2x + 1$ (прямая линия). Удаляем из этого графика две точки с абсциссами $x = 1$ и $x = -2$ (показаны стрелками).

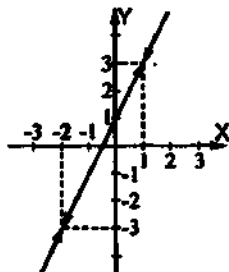


Рис. 2.16

6. Используя формулу разности квадратов, преобразуем данное выражение: $(n+1)(n+5) - (n-2)(n+2) = n^2 + 5n + n + 5 - (n^2 - 4) =$
 $= n^2 + 6n + 5 - n^2 + 4 = 6n + 9.$

Так как при всех натуральных n выражение $6n$ кратно 6, то остаток от деления выражения $6n + 9$ на 6 равен остатку от деления числа 9 на число 6. Такой остаток равен 3.

Ответ: 3.

Вариант 6

1. Используем формулы сокращенного умножения и преобразуем данное выражение в многочлен стандартного вида.

а) Применяя формулу куба суммы, получим:

$$(3a - 2b)^3 = (3a)^3 - 3 \cdot (3a)^2 \cdot 2b - 3 \cdot 3a \cdot (2b)^2 - (2b)^3 =$$

$$= 27a^3 - 3 \cdot 9a^2 \cdot 2b + 9a \cdot 4b^2 - 8b^3 = 27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3.$$

б) В выражении $(2a + b + 1)^2$ будем рассматривать сумму $2a + b$, как одно число и используем формулу квадрата суммы. Получаем:

$$(2a + b + 1)^2 = ((2a + b) + 1)^2 = (2a + b)^2 + 2(2a + b) + 1^2 =$$

$$= 4a^2 + 4ab + b^2 + 4a + 2b + 1.$$

в) В выражении $(-2x - 5y)(2x - 5y)$ вынесем множитель (-1) из первого сомножителя и применим формулу разности квадратов. Имеем:

$$(-2x - 5y)(2x - 5y) = -(2x + 5y)(2x - 5y) =$$

$$= ((2x)^2 - (5y)^2) = -(4x^2 - 25y^2) = 25y^2 - 4x^2.$$

Ответ:

а) $27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3$;

б) $4a^2 + 4ab + b^2 + 4a + 2b + 1$;

в) $25y^2 - 4x^2$.

2. Используем формулы сокращенного умножения и разложим выражение на множители.

а) Воспользуемся формулой разности квадратов и получим:

$$\begin{aligned} 9(a-2)^2 - 16(b+1)^2 &= 3^2 \cdot (a-2)^2 - 4^2 \cdot (b+1)^2 = \\ &= (3(a-2))^2 - (4(b+1))^2 = (3a-6)^2 - (4b+4)^2 = \\ &= ((3a-6) - (4b+4)) \cdot ((3a-6) + (4b+4)) = \\ &= (3a-6-4b-4) \cdot (3a-6+4b+4) = (3a-4b-10)(3a+4b-2). \end{aligned}$$

б) Сгруппируем члены в данном выражении и используем формулу квадрата разности и разности квадратов. Имеем:

$$\begin{aligned} 9x^2 + 16y^2 - 24xy - 9z^2 &= (9x^2 - 24xy + 16y^2) - 9z^2 = \\ &= (3x-4y)^2 - (3z)^2 = (3x-4y-3z)(3x-4y+3z). \end{aligned}$$

Ответ:

а) $(3a-4b-10)(3a+4b-2)$;

б) $(3x-4y-3z)(3x-4y+3z)$.

3. Преобразуем уравнение: $(x-1)^3 - x^2(x-4) - (x-2)(x+2) = 0$.

Для этого используем формулы куба суммы и разности квадратов и получим: $x^3 - 3x^2 - 1 - x^3 + 4x^2 - (x^2 - 4) = 0$ или $x^2 + 3x - 1 - x^2 + 4 = 0$.

Приведем подобные члены: $3x + 3 = 0$.

Решая это линейное уравнение, найдем $x = -1$.

Ответ: $x = -1$.

4. В данном выражении выделим квадрат разности. Для этого член $-5y^2$ представим в виде $-5y^2 = -y^2 - 4y^2$ и сгруппируем члены.

$$\begin{aligned} \text{Получаем: } 5 + 12xy - 5y^2 - 9x^2 &= 5 + 12xy - y^2 - 4y^2 - 9x^2 = \\ &= 5 - y^2 - (4y^2 - 12xy + 9x^2) = 5 - y^2 - (2y - 3x)^2. \end{aligned}$$

Данное выражение представляет собой разность числа 5 и двух неотрицательных величин y^2 и $(2y-3x)^2$. Очевидно, что данное выражение будет наибольшим, если вычитаемые величины минимальны (т. е. равны нулю), откуда $y = 0$ и $2y - 3x = 0$ (тогда $x = \frac{2}{3}y = 0$).

Итак, при $x = y = 0$ данное выражение имеет наибольшее значение равное 5.

Ответ: 5.

5. Для построения графика функции $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} + \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$ учтем, что знаменатели дробей не равны нулю (т. е. $x + 1 \neq 0$ и $x - 2 \neq 0$), откуда $x \neq -1$ и $x \neq 2$. Числитель первой дроби является квадратом разности, числитель второй дроби – квадратом суммы. Поэтому можно со-

кратить дроби. Получаем: $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} + \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = \frac{(x + 1)^2}{x + 1} + \frac{(x - 2)^2}{x - 2} =$
 $= x + 1 + x - 2 = 2x - 1.$

Итак, строим график линейной функции $y = 2x - 1$ (прямая линия). Удаляем из этого графика две точки с абсциссами $x = -1$ и $x = 2$ (показаны стрелками).

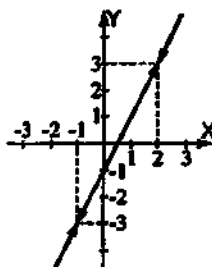


Рис. 2.17

6. Используя формулу разности квадратов, преобразуем данное выражение: $(n + 2)(n + 4) - (n - 1)(n + 1) = n^2 + 4n + 2n + 8 - (n^2 - 1) =$
 $= n^2 + 6n + 8 - n^2 + 1 = 6n + 9.$

Так как при всех натуральных n выражение $6n$ кратно 6, то остаток от деления выражения $6n + 9$ на 6 равен остатку от деления числа 9 на число 6. Такой остаток равен 3.

Ответ: 3.

Урок 105. Подготовка к тематическому зачету

Цель: повторить решение задач по теме «Формулы сокращенного умножения».

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Основные понятия

При решении задач при необходимости напомним нужные сведения из разделов 12–14 (уроки 85–104).

III. Задание на уроке

№ 1035 (а, ж); 1039 (в); 1043 (а); 1044 (б); 1048 (д); 1055 (б); 1070 (а); 1083 (а, в); 1088 (д).

IV. Задание на дом

№ 1035 (б, е); 1039 (д); 1043 (в); 1044 (г); 1048 (е); 1055 (д); 1070 (в); 1083 (б, г); 1088 (е).

V. Подведение итогов урока

Уроки 106–107. Зачет по теме «Формулы сокращенного умножения»

Цель: сравнение успеваемости учащихся при одинаковой сложности заданий, возможность повышения оценок за выполненные контрольные работы.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Характеристика зачетной работы

Работа составлена в двух равноценных вариантах. По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий. Соответственно у учащихся возрастает возможность выбора задач. Все задания разбиты на три блока А, В и С. Самые простые задачи находятся в части А, более сложные – в части В, еще сложнее – в части С. Каждая задача из А оценивается в 1 балл, из В – в 2 балла, из С – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Поэтому разбору заданий работы отдельного задания можно и не посвящать (решения задач могут быть вывешены на стенде). Для стендового размещения разбор вариантов приводится.

Вариант 1

А

1. Пробразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

а) $(2a-3)^2$; б) $(3a-4b)(3a+4b)$; в) $(x-2)(x^2+2x+4)$.

2. Разложите многочлен на множители:

а) $4a^2-9$; б) $x^2+6ax+9a^2$; в) $2c^4-4c^3+2c$.

3. Упростите выражение: $2(a-b)^2-(a-2b)(a+2b)$.

4. Докажите, что число 187^3-5^9 кратно 62.

5. Сравните числа $(197+361)^2$ и 197^2+361^2 .

6. Докажите, что при всех значениях x значение выражения $7-4x+4x^2$ больше 5.

7. Постройте график функции $y=(x+2)^2-4(x+1)$.

В

8. Пробразуйте выражение в произведение $9a^2(b-c)^2-16a^2b^2$.

9. Вычислите без калькулятора:

$$\left(\frac{137,5^3 - 112,5^3}{5^2} + 137,5 \cdot 112,5 \right) : (225^2 - 25^2).$$

10. Найдите наименьшее значение выражения:

$$2a^2 - 4ab + 4b^2 - 2a + 4.$$

При каких значениях a и b оно достигается?

11. Решите уравнение: $(3x - 2a)^2 = (2x + a)^2$.

С

12. Сравните числа $189 \cdot 191 \cdot 193 \cdot 195$ и 192^4 .

13. При каких значениях a равенство $(x+7)^2 - 9(x+5) + 2 = (x+2)(x+a)$

является тождеством?

14. Постройте график функции $y = \frac{x^2 - 4}{|x| - 2}$.

Вариант 2

А

1. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

а) $(3a - 2)^2$; б) $(2a - 5b)(2a + 5b)$; в) $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$.

2. Разложите многочлен на множители:

а) $16 - 9a^2$; б) $x^2 - 8ax + 16a^2$; в) $3c^4 + 12c^3 + 12c^2$.

3. Упростите выражение: $3(a + b)^2 - (2a + b)(2a - b)$.

4. Докажите, что число $117^3 - 4^9$ кратно 53.

5. Сравните числа $(341 + 113)^2$ и $341^2 + 113^2$.

6. Докажите, что при всех значениях x значение выражения $5 - 6x + 9x^2$ больше 3.

7. Постройте график функции $y = (x - 3)^2 + 6(x - 1,5)$.

В

8. Преобразуйте выражение в произведение $16a^2(b - 2c)^2 - 9a^2b^2$.

9. Вычислите без калькулятора:

$$\left(\frac{144,5^3 - 95,5^3}{7^2} + 144,5 \cdot 95,5 \right) : (210^2 - 30^2).$$

10. Найдите наименьшее значение выражения: $10a^2 - 6ab + b^2 - 4a + 6$.

При каких значениях a и b оно достигается?

11. Решите уравнение: $(3x - 4a)^2 = (x + 2a)^2$.

С

12. Сравните числа $273 \cdot 275 \cdot 277 \cdot 279$ и 276^4 .

13. При каких значениях a равенство: $(x+5)^2 - 4(x+7) + 11 = (x+2)(x+a)$ является тождеством?

14. Постройте график функции $y = \frac{9-x^2}{|x|-3}$.

III. Разбор заданий

Вариант 1

1. Ответ:

а) $4a^2 - 12a + 9$;

б) $9a^2 - 16b^2$;

в) $x^3 - 8$.

2. Ответ:

а) $(2a-3)(2a+3)$;

б) $(x+3a)^2$;

в) $2c^2(c-1)^2$.

3. Ответ: $a^2 - 4ab + 6b^2$.

4. Ответ: доказано.

5. Ответ: первое число больше.

6. Ответ: доказано.

7.

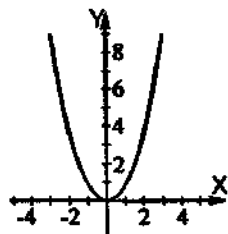


Рис. 2.18

8. Ответ: $-a^2(b+3c)(7b-3c)$.

9. Ответ: $\frac{9}{20}$.

10. Ответ: 3, при $a=1$, $b=\frac{1}{2}$.

11. Ответ: $x=3a$ и $x=\frac{a}{5}$.

12. Для сравнения чисел преобразуем первое число. Каждый множитель в нем запишем, используя число 192. Получаем: $189 \cdot 191 \cdot 193 \cdot 195 = (192-3)(192-1)(192+1)(192+3)$.

Изменим, порядок умножения чисел и используем формулу разности квадратов: $(192-3)(192+3)(192-1)(192+1) = (192^2-3^2)(192^2-1^2)$. В этом произведении каждый множитель меньше 192^2 . Поэтому произведение меньше $192^2 \cdot 192^2 = 192^4$. Итак, первое число меньше второго.

Ответ: первое число меньше.

13. Используя формулу квадрата суммы, преобразуем данное равенство. Получаем: $(x+7)^2 - 9(x+5) + 2 = (x+2)(x+a)$ или

$$x^2 + 14x + 49 - 9x - 45 + 2 = x^2 + ax + 2x + 2a.$$

Приведем подобные члены и получим: $5x + 6 = ax + 2x + 2a$ или $3x + 6 = ax + 2a$.

В левой и правой части равенства стоят многочлены первой степени. Они будут тождественно равны, если коэффициенты при x в них одинаковые и равны свободные члены. Получаем условия: $3 = a$ и $6 = 2a$, которые выполняются только при $a = 3$. Итак, при $a = 3$ данное равенство является тождеством.

Ответ: $a = 3$.

14. Преобразуем данную функцию $y = \frac{x^2 - 4}{|x| - 2}$. Учтем, что $|x| - 2 \neq 0$,

т. е. $x \neq \pm 2$. Используем свойство модуля $x^2 = |x|^2$ и формулу разности

квадратов. Тогда можно сократить дробь. Имеем: $y = \frac{x^2 - 4}{|x| - 2} = \frac{|x|^2 - 2^2}{|x| - 2} =$

$$= \frac{(|x| - 2) \cdot (|x| + 2)}{|x| - 2} = |x| + 2.$$

Построим график функции $y = |x| + 2 = \begin{cases} x + 2, & \text{если } x \geq 0, \\ -x + 2, & \text{если } x < 0. \end{cases}$

Из этого графика удалим две точки с абсциссами $x = \pm 2$ (показаны стрелками).

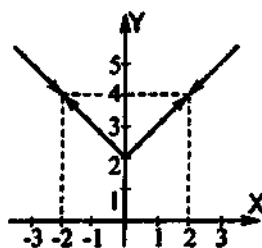


Рис. 2.19

Вариант 2

1. Ответ:

а) $9a^2 - 12a + 4$;

б) $4a^2 - 25b^2$;

в) $x^3 + 27$.

2. Ответ:

а) $(4 - 3a)(4 + 3a)$;

б) $(x - 4a)^2$;

в) $3c^2(c + 2)^2$.

3. Ответ: $-a^2 + 6ab + 4b^2$.

4. Ответ: доказано.
 5. Ответ: первое число больше.
 6. Ответ: доказано.
 7.

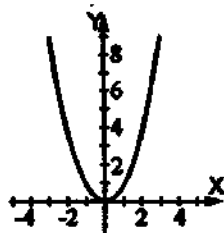


Рис. 2.20

8. Ответ: $a^2(b-8c)(7b-8c)$.

9. Ответ: $\frac{4}{3}$.

10. Ответ: 2, при $a=2$, $b=6$.

11. Ответ: $x=3a$ и $x=\frac{a}{2}$.

12. Для сравнения чисел преобразуем первое число. Каждый множитель в нем запишем, используя число 276. Получаем: $273 \cdot 275 \cdot 275 \cdot 279 = (276-3)(276-1)(276+1)(276+3)$.

Изменим порядок умножения чисел и используем формулу разности квадратов: $(276-3)(276+3)(276-1)(276+1) = (276^2-3^2)(276^2-1^2)$. В этом произведении каждый множитель меньше 276^2 . Поэтому произведение меньше $276^2 \cdot 276^2 = 276^4$. Итак, первое число меньше второго.

Ответ: первое число меньше.

13. Используя формулу квадрата суммы, преобразуем данное равенство. Получаем: $(x+5)^2 - 4(x+7) + 11 = (x+2)(x+a)$ или

$$x^2 + 10x + 25 - 4x - 28 + 11 = x^2 + ax + 2x + 2a.$$

Приведем подобные члены и получим: $6x + 8 = ax + 2x + 2a$ или $4x + 8 = ax + 2a$.

В левой и правой части равенства стоят многочлены первой степени. Они будут тождественно равны, если коэффициенты при x в них одинаковые и равны свободные члены. Получаем условия: $4=a$ и $8=2a$, которые выполняются только при $a=4$. Итак, при $a=4$ данное равенство является тождеством.

Ответ: $a=4$.

14. Преобразуем данную функцию $y = \frac{9-x^2}{|x|-3}$. Учтем, что $|x|-3 \neq 0$,

т. е. $x \neq \pm 3$. Используем свойство модуля $x^2 = |x|^2$ и формулу разности

квадратов. Тогда можно сократить дробь. Имеем: $y = \frac{9-x^2}{|x|-3} = \frac{9^2-|x|^2}{|x|-3} =$
 $= \frac{(3-|x|) \cdot (2+|x|)}{|x|-3} = -(3+|x|) = -|x|-3.$

Построим график функции $y = -|x|-3 = \begin{cases} -x-2, & \text{если } x \geq 0, \\ x-3, & \text{если } x < 0. \end{cases}$

Из этого графика удалим две точки с абсциссами $x = \pm 3$ (показаны стрелками).

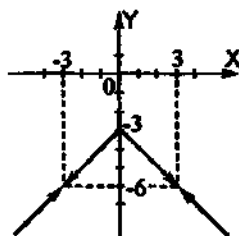


Рис. 2.21

Глава VI. Системы линейных уравнений

§ 15. Линейные уравнения с двумя переменными и их системы

Урок 108. Линейное уравнение с двумя переменными

Цель: ознакомить с понятием об уравнении с двумя переменными и их решением.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Изучение нового материала

Пример 1

Пусть первое число (обозначим его x) больше квадрата второго числа (обозначим его y) на 3. По условию соотношение между числами можно описать равенством $x - y^2 = 3$. Это равенство с двумя переменными x и y , очевидно, выполняется не при всех значениях переменных. Подстановкой в равенство $x - y^2 = 3$ убеждаемся, что при $x = 7$ и $y = 2$ оно выполняется. Для значений $x = 5$ и $y = 2$ такое равенство не выполняется. Поэтому подобные равенства с двумя переменными называют уравнениями с двумя переменными (или двумя неизвестными). Пару чисел $x = 7$ и $y = 1$ называют решением уравнения.

Решение можно записать также в виде $(7; 2)$, где первое число соответствует неизвестной x , второе число — неизвестной y . Почетче сформулируем основные понятия.

Равенство, содержащее две переменные, называется уравнением с двумя переменными (или двумя неизвестными). В частности, если в уравнение неизвестные входят только первой степени, то такое уравнение называют линейным уравнением с двумя переменными. Линейное уравнение имеет вид $ax + by = c$ (где x и y — переменные, a , b и c — некоторые числа). Например, линейными являются уравнения: $3x - 4y = 7$; $5x + 7y = 0$ и т. д.

Решением уравнения с двумя неизвестными называется пара значений переменных, при подстановке которых, уравнение становится верным числовым равенством.

Уравнения с двумя переменными, имеющие одни и те же решения, называют равносильными. Уравнения с двумя переменными, не имеющие решения, также считают равносильными.

Уравнения с двумя переменными обладают такими же свойствами, как и уравнения с одной переменной:

1. Если в уравнении перенести любой член из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному.

2. Если обе части уравнения умножить или разделить на одну и ту же (не равное нулю) число, то получится уравнение, равносильное данному.

Пример 2

а) Уравнения $3x^2 + 4y^2 = 5$ и $3x^2 = 5 - 4y^2$ равносильны, так как член $4y^2$ перенесен (с изменением знака) из левой части в правую.

б) Уравнения $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = \frac{5}{12}$ и $3x^2 + 4y^2 = 5$ равносильны, так как обе части первого уравнения умножили на число 12 (не равное нулю) и получили: $\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3}\right) \cdot 12 = \frac{5}{12} \cdot 12$ или $\frac{x^2}{4} \cdot 12 + \frac{y^2}{3} \cdot 12 = 5$, или $3x^2 + 4y^2 = 5$.

В седьмом классе изучаются только линейные уравнения. Поэтому остановимся на них подробнее.

Пример 3

Рассмотрим уравнение $3x + 5y = 11$. Используя свойства уравнений, выразим из этого уравнения одну переменную через другую, например, сначала y через x . Для этого перенесем член $3x$ из левой части в правую, изменив его знак. Получаем равносильное уравнение $5y = -3x + 11$. Разделим обе части этого уравнения на число 5 (не равное

нулю). Имеем уравнение равносильное данному $y = -\frac{3}{5}x + \frac{11}{5}$. Пользуясь этим равенством, для любого x можно вычислить соответствующее

значение y . Например: если $x = 2$, то $y = -\frac{3}{5} \cdot 2 + \frac{11}{5} = -\frac{6}{5} + \frac{11}{5} = 1$, $x = 7$,

то $y = -\frac{3}{5} \cdot 7 + \frac{11}{5} = -\frac{21}{5} + \frac{11}{5} = -2$ и т. д.

Пары чисел $(2; 1)$, $(7; -2)$ – решения данного уравнения. Таким образом, данное уравнение имеет бесконечно много решений.

Из данного уравнения $3x + 5y = 11$ можно выразить и переменную x через переменную y . Для этого перенесем член $5y$ из левой части в правую, изменив его знак. Получаем равносильное уравнение $3x + 5y = 11$.

Разделим обе части этого уравнения на число 3 (не равное нулю). Имеем уравнение равносильное данному $x = -\frac{5}{3}y + \frac{11}{3}$. Пользуясь этим равенством, для любого y можно найти соответствующее значение x . Напри-

мер, для $y = 2$ получаем $x = -\frac{5}{3} \cdot 2 + \frac{11}{3} = \frac{1}{3}$ и т. д. Пара чисел $\left(\frac{1}{3}; 2\right)$

также решение данного уравнения.

Заметим, что линейное уравнение всегда можно привести к виду $ax + by = c$, пользуясь равносильными преобразованиями.

Пример 4

Рассмотрим уравнение $\frac{2x+1}{3} = \frac{y-3}{5}$. В это уравнение переменные x и y входят в первой степени. Поэтому такое уравнение является линейным. Умножим обе части уравнения на наименьшее общее кратное чисел 3 и 5 – число 15. Получаем равносильное уравнение: $\frac{2x+1}{3} \cdot 15 = \frac{y-3}{5} \cdot 15$ или $(2x+1) \cdot 5 = (y-3) \cdot 3$, или $10x + 5 = 3y - 9$. Изменив знак, перенесем член $3y$ в левую часть, а член 5 – в правую. Вновь получаем уравнение равносильное данному: $10x - 3y = -5 - 9$ или $10x - 3y = -14$.

III. Задание на уроке

№ 1093; 1095 (а); 1097; 1098 (а); 1099; 1102 (а, б); 1104 (б); 1106.

IV. Контрольные вопросы

- Что называется уравнением с двумя переменными? Приведите примеры.
- Какое уравнение с двумя переменными называется линейным? Приведите примеры.
- Напишите общий вид линейного уравнения с двумя переменными.
- Что называется решением уравнения с двумя переменными?
- Какие уравнения с двумя переменными называются равносильными?
- Какие преобразования уравнений с двумя переменными приводят к равносильным уравнениям?

V. Задание на дом

№ 1092; 1095(б); 1096; 1098(б); 1101; 1103; 1104(а); 1105.

VI. Подведение итогов урока

Урок 109–110. Нелинейные уравнения с двумя переменными

Цель: дать представление о нелинейных уравнениях с двумя переменными.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

- 1) Какое уравнение с двумя переменными называется линейным? Приведите примеры.
- 2) Из уравнения $3x - 5y = 7$ выразите каждую переменную через другую.
- 3) Найдите значение величины a , если уравнение $ax + 3y = 11$ имеет решение $x = 2$, $y = 1$.

Вариант 2

- 1) Что называется решением линейного уравнения с двумя переменными? Приведите примеры.
- 2) Из уравнения $4x - 5y = 9$ выразите каждую переменную через другую.
- 3) Найдите значение величины a , если уравнение $5x + ay = 9$ имеет решение $x = 3$, $y = 2$.

III. Изучение нового материала

В алгебре помимо линейных уравнений с двумя переменными рассматриваются и **нелинейные уравнения с двумя переменными**. К таким уравнениям относятся те, в которых хотя бы одна из переменных входит в степени выше первой. Уравнения, содержащие знаки модуля, также будем относить к нелинейным уравнениям.

Пример 1

Следующие уравнения являются нелинейными:

- а) $2x + |y - 1|$, так как содержит модуль величины $y - 1$;
- б) $x^2 + 3x - 7y = 1$, так как содержит квадрат величины x ;
- в) $x + y - xy = 5$, так как содержит произведение xy — одночлен второй степени.

Количество решений нелинейного уравнения с двумя переменными может быть различным.

Пример 2

Рассмотрим уравнение $2(x-1)^2 + 3(y+2)^2 = -5$. Очевидно, что при

любых значениях переменных x и y квадраты величин $x - 1$ и $yu + 2$ будут неотрицательными. При умножении их на положительные числа 2 и 3 произведения также неотрицательные. Сумма таких неотрицательных величин также неотрицательна. Поэтому левая часть данного уравнения при всех значениях переменных x и y неотрицательна и не может равняться отрицательному числу -5 , стоящему в правой части. Следовательно, данное уравнение решений не имеет.

Пример 3

Рассмотрим уравнение $|2x - 3| + |4y - 5| = 0$. По свойству модуля величины он имеет только неотрицательные значения. Сумма двух неотрицательных выражений также неотрицательна и будет равняться нулю, если каждое из них равно нулю. Получаем уравнения: $|2x - 3| = 0$ и $|4y - 5| = 0$

Если модуль величины равен нулю, то и сама величина равна нулю. Имеем два линейных уравнения: $2x - 3 = 0$ (откуда $x = \frac{3}{2}$) и $4y - 5 = 0$ (тогда $y = \frac{5}{4}$). Итак, данное уравнение имеет единственное решение

$$x = \frac{3}{2} \text{ и } y = \frac{5}{4} \text{ или } \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{4}\right).$$

Пример 4

Рассмотрим уравнение $x^4 - 2x^2 + |y - 2| + 1 = 0$. Выделим квадрат разности и получим: $(x^4 - 2x^2 + 1) + |y - 2| = 0$ или $(x^2 - 1)^2 + |y - 2| = 0$. Выражения $(x^2 - 1)^2$ и $|y - 2|$ неотрицательны. Сумма этих неотрицательных величин будет равняться нулю, если каждое из них равно нулю. Получаем уравнения: $(x^2 - 1)^2 = 0$ и $|y - 2| = 0$ или $x^2 - 1 = 0$ и $y - 2 = 0$ (откуда $y = 2$).

Для решения первого уравнения разложим его левую часть на множители, используя формулу разности квадратов: $(x - 1)(x + 1) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, т. е. $x - 1 = 0$ (откуда $x = 1$) и $x + 1 = 0$ (тогда $x = -1$). Таким образом, данное уравнение имеет два решения $(1; 2)$ и $(-1; 2)$.

Пример 5

Рассмотрим уравнение $3y + 2x^2 = 5$. Из этого уравнения выразим неизвестную y и получим: $3y = 5 - 2x^2$ и $y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x^2$.

Очевидно, что для любого выбранного значения x по этой формуле можно найти значение y . Например:

$$\text{для } x = 1 \text{ получаем: } y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \cdot 1^2 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} = 1,$$

$$\text{при } x = 2 \text{ находим } y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \cdot 2^2 = \frac{5}{3} - \frac{8}{3} = -1 \text{ и т. д.}$$

Итак, мы нашли решения $(1; 1)$, $(2; -1)$. Очевидно, что данное уравнение имеет бесконечно много решений.

Достаточно часто встречаются нелинейные уравнения с параметрами.

Пример 6

При каком значении параметра a уравнение $3ax^2 + 2y^3 + ax + ay = 17$ имеет решение $(2; 1)$?

Так как решение данного уравнения известно, то при его подстановке в уравнение получаем верное равенство: $3a \cdot 2^2 + 2 \cdot 1^3 + a \cdot 2 + a \cdot 1 = 17$ или $12a + 2 + 2a + a = 17$.

Приведем подобные члены $15a + 2 = 17$ или $15a = 17 - 2$ или $15a = 15$, откуда $a = 1$.

Пример 7

Найти значение параметра a , при котором уравнение $3x^2 + x - 4y + 6 = 0$ имеет решение $(a - 1; a + 2)$. Найти это решение.

Подставим заданное решение в данное уравнение и получим верное равенство: $3(a - 1)^2 + (a - 1) - 4(a + 2) + 6 = 0$ или

$$3a^2 - 6a + 3 + a - 1 - 4a - 8 + 6 = 0, \text{ или } 3a^2 - 9a = 0.$$

Разложим левую часть уравнения на множители: $3a(a - 3) = 0$.

Произведение множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, т. е. $a = 0$ или $a - 3 = 0$ (тогда $a = 3$). Для каждого из двух найденных значений a определим решение данного уравнения, подставив a в решение $(a - 1; a + 2)$. При $a = 0$ получаем $(-1; 2)$, для $a = 3$ находим $(2; 5)$.

Пример 8

При каком значении параметра a решением уравнения $2ax^2 - 3x^2 - 9y + 6ay - 4ax = 0$ будет любая пара чисел?

Задачу можно решить двумя способами.

1 способ

По условию решением данного уравнения будет любая пара чисел. Пусть этим решением будет, например, пара чисел $(1; 1)$. Подставим эти числа в уравнение: $2a \cdot 1^2 - 3 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 6a \cdot 1 + 6 \cdot 1 - 4a \cdot 1 = 0$ или $2a - 3 - 9 + 6a + 6 - 4a = 0$, или $4a - 6 = 0$, откуда $a = 1,5$.

Подставим это значение в уравнение:

$$2 \cdot 1,5x^2 - 3x^2 - 9y + 6 \cdot 1,5y + 6x - 4 \cdot 1,5 \cdot x = 0 \text{ или } 0 \cdot x^2 + 0 \cdot y + 0 \cdot x = 0.$$

Очевидно, что любые числа x и y являются решением этого уравнения.

2 способ

Группируем члены данного уравнения и вынесем общий множитель за скобки.

Получаем:

$$(2ax^2 + 6ay - 4ax) + (-3x^2 - 9y + 6x) = 0 \text{ или}$$

$$2a(x^2 + 3y - 2x) - 3(x^2 + 3y - 2x) = 0, \text{ или}$$

$$(x^2 + 3y - 2x)(2a - 3) = 0.$$

Очевидно, что это произведение будет равно нулю при всех значениях x и y , если второй множитель равен нулю, т. е. $2a - 3 = 0$, откуда $a = 1,5$.

IV. Задание на уроке и дома

1. Решите уравнения с двумя неизвестными:

а) $|x-1| + |y+2| = 0$;

б) $|2x-3| = -|3y+4|$;

в) $|x-2y| + (x-2)^2 = 0$;

г) $|x-y+1| = -(y+1)^2$;

д) $(x-3y+1)^2 + (x+3)^2 = 0$;

е) $(2y+x-2)^2 = 0$;

ж) $x^2 - 6x + y^2 - 4y + 13 = 0$;

з) $2x^2 - 8x + y^2 + 6y + 17 = 0$.

(Ответы: а) (1; -2); б) $\left(1,5; -\frac{4}{3}\right)$; в) (2; 1); г) (-2; -1); д) $\left(-3; -\frac{2}{3}\right)$;

е) (-2; 2); ж) (3; 2); з) (2; -3).)

2. Найдите значение параметра a , при котором данное уравнение имеет заданное решение. Найдите это решение.

а) $3x + 5y = 26, (a; 2a)$;

б) $5x - 2y = 11, (3a; 2a)$;

в) $2x + 3y = 14, (a+1; a-1)$;

г) $6x - 5y = 23, (a+2; -a)$;

д) $x^2 + 4y = 0, (2a; a)$;

е) $x^2 + x - 5y = 7, (a+1; a-1)$;

ж) $2x^2 + 3y^2 - 4y = 7, (a+2; a+1)$; з) $3x^2 + y^2 + 11y = 12, (2a; a+1)$.

(Ответы: а) $a = 2, (2; 4)$; б) $a = 1, (3; 2)$; в) $a = 3, (4; 2)$; г) $a = 1, (3; -1)$; д) $a = 0, (0; 0)$; $a = -1, (-2; -1)$; е) $a = 0, (1; -1)$; $a = 2, (3; 1)$; ж) $a = 0, (2; 1)$; $a = -2, (0; -1)$; з) $a = 0, (0; 1)$; $a = -1, (-2; 0)$.)

3. Найдите значение параметра a , при котором данное уравнение имеет заданное решение:

а) $3x + 2ay = 2a, (2; 1)$;

б) $2ax - 3y = 6a, (2; -3)$;

в) $ax^2 + 7y^2 + 2x = 3a, (-1; 3)$; г) $2x^3 - 7ay + 5ax = 8, (1; 2)$.

(Ответ: а) $a = 2$; б) $a = 4,5$; в) $a = 30,5$; г) $a = -\frac{6}{23}$.)

4. Найдите значение параметра a , при котором решением данного уравнения будет любая пара чисел:

а) $ax - x + 5ay - 5y = 2a - 2$; б) $ax + 3x + 2ay + 6y = a + 3$;

в) $ax^2 + 5ay^2 + x^2 = 2a + 2 - 5y^2$; г) $3ax + 4ay^2 + 4y = 2ay + 8y^2 + 6x$.

(Ответы: а) $a = 1$; б) $a = -3$; в) $a = -1$; г) $a = 2$.)

V. Контрольные вопросы

- Какое уравнение называется нелинейным? Приведите примеры.
- Что называется решением нелинейного уравнения с двумя неизвестными?
- Сколько решений может иметь нелинейное уравнение с двумя переменными?

VI. Подведение итогов урока

Уроки 111–112. График линейного уравнения с двумя переменными

Цель: ознакомить с основными понятиями о графике линейного уравнения с двумя переменными.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

- 1) Решите уравнение $|2x - 1| = y^2 + 6y - 9$.
- 2) При каком значении величины a уравнение $3x^2 + 5y = 3a^2 - 13$ имеет решение $x = a + 1$, $y = 2a$? Найдите это решение.
- 3) Докажите, что уравнение $|2x - 3y + 1| + 8x^2 = -y^2 - 1$ не имеет решений.

Вариант 2

- 1) Решите уравнение $|3y + 1| = -x^2 + 4x - 4$.

2) При каком значении величины a уравнение $2x + 5y^2 = 20a^2 - 9$ имеет решение $x = 3a$, $y = 2a - 1$? Найдите это решение.

3) Докажите, что уравнение $|5x - y + 3| + 2x^2 = -3y^2 - 3$ не имеет решений.

III. Изучение нового материала

Рассмотрим решения некоторого уравнения с двумя переменными. Каждое такое решение представляет собой пару чисел. Построим это решение на координатной плоскости. Оно изображается точкой, абсцисса которой равна значению x , ордината – значению y . Аналогично построим все решения данного уравнения, которые также изображаются точками. Множество таких точек образуют график уравнения.

Графиком уравнения с двумя переменными называется множество всех точек координатной плоскости, координаты которых являются решением этого уравнения.

Пример 1

Рассмотрим уравнение $2x - 3y = 6$. Выразим из него переменную y через x . Получаем: $-3y = 6 - 2x$ и $y = \frac{2}{3}x - 2$.

Уравнения $2x - 3y = 6$ и $y = \frac{2}{3}x - 2$ равносильны. Формула $y = \frac{2}{3}x - 2$ задает линейную функцию. Построим ее график – прямую линию. Так как уравнения $2x - 3y = 6$ и $y = \frac{2}{3}x - 2$ равносильны, то построенная прямая будет и графиком уравнения $2x - 3y = 6$.

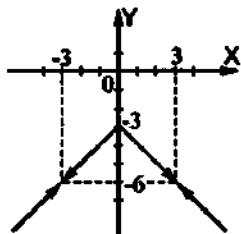


Рис. 2.22

Из рассмотренного примера видно, что графиком линейного уравнения с двумя переменными является прямая. Обсудим возможные варианты графика линейного уравнения $ax + by = c$.

а) Если коэффициент b при неизвестной y не равен нулю (т. е. $b \neq 0$), то можно выразить переменную y через x . Получаем: $by = -ax + c$ и

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$

Формула $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ задает линейную функцию. График этой функции – прямая, наклоненная под определенным углом к оси абсцисс (см. пример 1) при условии $a \neq 0$

б) Если коэффициенты $b \neq 0$ и $a = 0$. Тогда, подставив значения $a = 0$ в формулу $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, получим $y = \frac{c}{b}$. Формула $y = \frac{c}{b}$ задает прямую или параллельную, или совпадающую с осью абсцисс, так как при любых значениях x величина y постоянна.

Пример 2

Рассмотрим уравнение $0 \cdot x - 3y = 6$. Найдем из этого равенства $y = -\frac{6}{3} = -2$. Построим график функции $y = -2$. Видно, что при любом значении x величина y одна и та же и $y = -2$. Поэтому графиком является прямая, параллельная оси абсцисс.

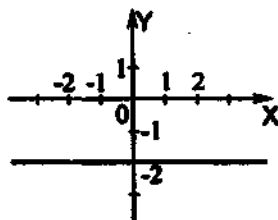


Рис. 2.23

в) Если коэффициенты $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Подставив $b = 0$ в уравнение $ax + by = c$ и получим $ax = c$, откуда $x = \frac{c}{a}$. По аналогии со случаем б) формула $x = \frac{c}{a}$ задает прямую или параллельную, или совпадающую с осью ординат, так как при любых значениях y величина x постоянна.

Пример 3

Рассмотрим уравнение $2x + 0 \cdot y = 6$. Найдем из этого равенства $x = \frac{6}{2} = 3$. Поэтому решением данного уравнения будут все пары чисел $(x; y)$, для которых $x = 3$, y – любое число. График уравнения состоит из точек, абсцисса которых равна 3, ордината – равна любому числу. Такие точки образуют прямую, проходящую через точку $(3; 0)$ и параллельную оси y .

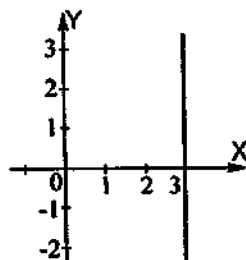


Рис. 2.24

г) Если коэффициенты $a=0, b=0$ и $c=0$. Тогда уравнение $ax+by=c$ имеет вид $0 \cdot x + 0 \cdot y = c$. Очевидно, что любая пара чисел $(x; y)$ удовлетворяет этому уравнению. Поэтому графиком уравнения являются все точки координатной плоскости (или вся координатная плоскость).

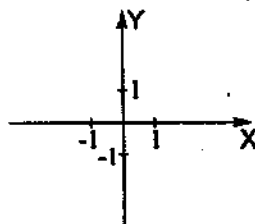


Рис. 2.25

д) Если коэффициенты $a=0, b=0$ и $c \neq 0$. Тогда уравнение $ax+by=c$ имеет вид $0 \cdot x + 0 \cdot y = c$. Очевидно, что такое уравнение решений не имеет и ни одна точка координатной плоскости не входит в график этого уравнения, т. е. график уравнения не существует.

Для удобства результаты проведенного анализа приведены в таблице.

Коэффициент уравнения	a	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	$= 0$
	b	$\neq 0$	$\neq 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$
	c				$= 0$	$\neq 0$
График		Прямая с наклоном к оси OX	Прямая параллельная оси OX	Прямая параллельная оси OY	Координатная плоскость	Нет

Рассмотрим более сложные задачи.

Пример 4

При каком значении параметра a график уравнения $(4a-3) \cdot x + (3a-6)y = 3a+4$ параллелен оси ординат? Постройте этот график.

На основании таблицы имеем, что график данного линейного уравнения будет параллелен оси ординат, если коэффициент при неизвестной y равен нулю, т. е. $3a - 6 = 0$, откуда $a = 2$. Подставим это значение a в данное уравнение и получим: $(4 \cdot 2 - 3)x + (3 \cdot 2 - 6)y = 3 \cdot 2 + 4$ или $5x + 0 \cdot y = 10$.

Из этого равенства находим $x = \frac{10}{5} = 2$. Построим график данного уравнения. Им является прямая, проходящая через точку $(2; 0)$ параллельно оси ординат.

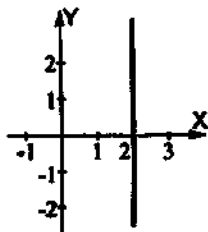


Рис. 2.26

Пример 5

При всех значениях параметра a постройте график уравнения:

$$3ax + 2ay - 3x - 2y + 6a - 6 = 0.$$

Преобразуем данное уравнение. Для этого сгруппируем члены, зависящие от параметра a , и, не зависящие от a . Вынесем общие множители за скобки. Получаем: $(3ax + 2ay + 6a) + (-3x - 2y - 6) = 0$ или $a(3x + 2y + 6) - (3x + 2y + 6) = 0$, или $(4a - 3)(3x + 2y + 6)(a - 1) = 0$.

Так как произведение множителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю. Рассмотрим эти случаи.

а) Пусть первый множитель равен нулю, т. е. $3x + 2y + 6 = 0$. Выразим из этого уравнения переменную y . Имеем: $2y = -3x - 6$ и $y = -\frac{3}{2}x - 3$.

Эта формула определяет линейную функцию. Построим график. Им является наклонная прямая.

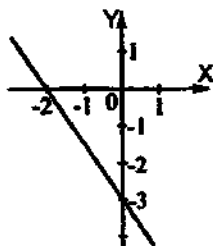


Рис. 2.27

б) Пусть второй множитель равен нулю, т. е. $a - 1 = 0$ или $a = 1$. Очевидно, что при таком значении a переменные x и y могут быть любыми. Поэтому в этом случае графиком уравнения будет координатная плоскость.

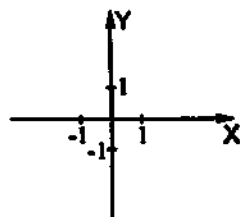


Рис. 2.28

Итак, при $a \neq 1$ график данного уравнения представлен в пункте а), при $a = 1$ — в пункте б).

IV. Задание на уроке

№ 1109 (а, г) 1110; 1112 (а, в, г); 1113 (в, г); 1114 (а, г); 1115; 1117 (а, б).

V. Контрольные вопросы

- Что является графиком уравнения с двумя переменными?
- Какой график может иметь линейное уравнение с двумя переменными?
- При каком условии график линейного уравнения пересекает ось координат?
- При каком условии график линейного уравнения параллелен оси: а) абсцисс? б) оси ординат? Приведите примеры.
- При каких условиях графиком линейного уравнения будет координатная плоскость? Приведите примеры.
- При каких условиях у линейного уравнения нет графика? Приведите примеры.

VI. Задание на дом

№ 1109 (б, в); 1111; 1112 (б, д, е); 1113 (а, б); 1114 (б, в); 1116.

VII. Творческие задания

1. При каком значении параметра a график уравнения

а) $(a - 2)x + (2a - 6)y + 8 = 0$ параллелен оси x ;

б) $(3a - 1)x + (a - 1)y - 6 = 0$ параллелен оси y ;

в) $(2a - 6)x + (a - 3)y - 4a + 12 = 0$ является координатной плоскостью;

г) $(6 - 4a)x + (2a - 3)y + 3a = 0$ не существует?

Для пунктов а) и б) постройте график уравнения.

(Ответы: а) $a = 2$, прямая $y = 4$, б) $a = 1$, прямая $x = 3$, в) $a = 3$, г) $a = \frac{3}{2}$.)

2. График данного уравнения проходит через точку А. Постройте этот график:

а) $2ax + 3y = 8$, А(1; 2),

б) $(a-1)x + (a+1)y = 2$, А(1; 1),

в) $(a+2)x + (2a-1)y = 5$, А(2; 1),

г) $ax + 2ay + x + 2y = 5a + 5$, А(3; 1).

(Ответы: а) $a = 1$; б) $a = 1$; в) $a = \frac{1}{2}$; г) $a = -1$.)

VIII. Подведение итогов урока

Урок 113. График нелинейного уравнения с двумя переменными

Цель: дать представление о графиках некоторых нелинейных уравнений с двумя переменными.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1) Что является графиком уравнения с двумя переменными?

2) Постройте график уравнения $2x + 3y = 5$.

3) График уравнения $2x + 3ay = 4a$ проходит через точку А(1; 1). Постройте этот график.

Вариант 2

1) Какой график может иметь линейное уравнение с двумя переменными?

2) Постройте график уравнения $3x - 2y = 5$.

3) График уравнения $ax + 2y = 4a$ проходит через точку А(2; 1). Постройте этот график.

III. Изучение нового материала

В случае линейного уравнения с двумя переменными определение графика остается таким же, как и в предыдущем уроке. Поэтому ограничимся рассмотрением графиков некоторых типичных уравнений.

Пример 1

Рассмотрим уравнение $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 0$. Очевидно, что при всех значениях переменных x и y квадраты величин $x-1$ и $y+3$ неотрицательны. Сумма двух неотрицательных величин может равняться нулю только в том случае, когда каждая из них равна нулю, т. е. $(x-1)^2$ и $(y+3)^2 = 0$. Квадрат величины равняется нулю, если сама величина равна нулю. Получаем уравнение $x-1=0$ и $y+3=0$. Решаем эти линейные уравнения с одной переменной, находим $x=1$ и $y=-3$. Итак, решением данного уравнения является только пара чисел $(1; -3)$. Изобразим точку A с такими координатами на плоскости и получим график данного уравнения. В этом случае график представляет собой единственную точку координатной плоскости.

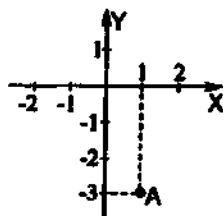


Рис. 2.29

Пример 2

Рассмотрим уравнение $xu + x - y - 1 = 0$. Сгруппируем члены и разложим его левую часть на множители: $(xu + x) - (y + 1) = 0$ или $x(y + 1) - (y + 1) = 0$ или $(y + 1)(x - 1) = 0$. Так как произведение двух множителей равно нулю, то один из таких множителей равен нулю, т. е. $y + 1 = 0$ (откуда $y = -1$) или $x - 1 = 0$ (тогда $x = 1$). Построим прямые $y = -1$ (горизонтальная прямая) и $x = 1$ (вертикальная прямая) на координатной плоскости.

Точки, расположенные на этих прямых, являются решением уравнения. Поэтому построенные прямые – график данного уравнения.

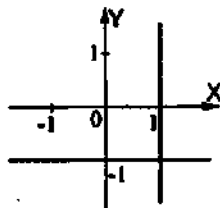


Рис. 2.30

Пример 3

Рассмотрим уравнение $xy(y-x^2)=0$. Произведение трех множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, т. е. $x=0$ или $y=0$ или $y-x=0$ (тогда $y=x$). Построим прямые с уравнением $x=0$ (ось ординат) и уравнением $y=0$ (ось абсцисс). Также построим график квадратичной функции $y=x^2$ (параболу). Таким образом, график данного уравнения – оси координат и парабола.

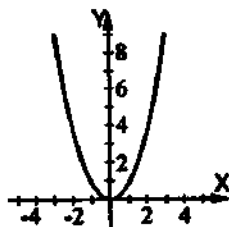


Рис. 2.31

Пример 4

Рассмотрим уравнение $(x-2y)^2 = x^2 - 4xy + 4y^2$. Учитывая формулу квадрата разности, получаем, что левая часть уравнения равна правой при всех значениях переменных x и y .

Тогда любая пара чисел (x, y) является решением данного уравнения. Поэтому графиком данного уравнения является координатная плоскость.

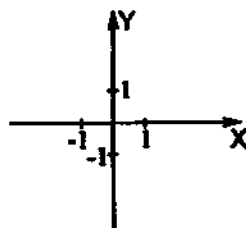


Рис. 2.32

Пример 5

Рассмотрим уравнение $(3x+2y-5)^2 + |2x-y+1| + 3 = 0$. Левая часть уравнения представляет собой сумму двух неотрицательных величин $(3x+2y-5)^2$ и $|2x-y+1|$, и положительного числа 3. Поэтому такая сумма не меньше числа 3 и равняться нулю не может. Следовательно, данное уравнение решений не имеет и его график не существует.

IV. Задание на уроке и дома

1. Постройте график нелинейного уравнения с двумя переменными:

а) $|2x-1|+|y+2|+1=0$;

б) $|5x-3|+|3y+2x-1|+4=0$;

в) $|2x-4|+|y-1|=0$;

г) $|x+3|+4|y-2|=0$;

д) $|x-1|+|2y+x-3|=0$;

е) $|3x-y+1|+|y+2|=0$;

ж) $|x^2-1|+|y-2|=0$;

з) $2|x+3|+3|y^2-4|=0$;

и) $|x^2-1|+|y^2-4|=0$;

к) $5|x^2-9|+2|y^2-1|=0$.

(Ответы: а, б) графика нет; в) точка А (2; 1); г) точка А (-3; 2); д) точка А (1; 1); е) точка А (-1; -2); ж) точки А (1; 2) и 5 (-1; 2); з) точки А (-3; -2) и В (-3; 2); и) точки А (-1; -2), В (-1; 2), С(1; -2), D (1; 2); к) точки А (-3; -1), В (-3; 1), С (3; -1), D (3; 1).)

2. Постройте график нелинейного уравнения с двумя переменными:

а) $(x-2)(y+3)=0$;

б) $(2x-3)(3y+5)=0$;

в) $(x-1)(y+2x-3)=0$;

г) $(2x+y-1)(3y-x+2)=0$;

д) $3xy+6x-y-2=0$;

е) $2xy+x-6y-3=0$;

ж) $y^2-x^2=0$;

з) $4y^2-9x^2=0$;

и) $y^2-x^4=0$;

к) $y^2+x^4=0$.

(Ответы: а) прямые $x=2$ и $y=-3$; б) прямые $x=\frac{3}{2}$ и $y=-\frac{5}{3}$;

в) прямые $x=1$ и $y=-2x+3$; г) прямые $x=-2x+1$ и $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$; д) пря-

мые $x=\frac{1}{2}$ и $y=-2$; е) прямые $x=3$ и $y=-\frac{1}{2}$; ж) прямые $y=-x$ и

$y=x$; з) прямые $y=-1,5x$ и $x=1,5x$; и) параболы $y=x^2$ и $y=-x^2$; к) точка А (0; 0).)

3. Постройте график нелинейного уравнения с двумя переменными:

а) $y-|x|=0$;

б) $y+|x|=1$;

в) $|y|-|x|=0$;

г) $|y|+|x|=2$;

д) $|x|-|y|=2$;

е) $|y|-|x|=2$;

ж) $2|x|+|y|=6$;

з) $|x|+2|y|=6$;

и) $|x|-2|y|=3$;

к) $2|x|-|y|=3$;

л) $|y|-2|x|=3$;

м) $2|y|-|x|=3$.

V. Подведение итогов урока

Уроки 114–115. Системы линейных уравнений с двумя переменными

Цель: ознакомить с понятием о системе линейных уравнений с двумя переменными, его решении и графическом способе решения таких систем.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

Пример 1

В двух седьмых классах учится 57 школьников. В 7 «а» классе на 5 школьников больше, чем в 7 «б» классе. Сколько учащихся в каждом классе?

Пусть в 7 «а» классе x учащихся, в 7 «б» классе – y учащихся. По условию задачи в двух классах 57 школьников, т. е. $x + y = 57$. В 7 «а» классе на 5 учащихся больше, т. е. $x - y = 5$. По условиям задачи составили два линейных уравнения с двумя переменными (или неизвестными) $x + y = 57$ и $x - y = -5$. Чтобы ответить на вопрос задачи, надо найти такие значения переменных x и y , при которых каждое из уравнений будет верным равенством, т. е. надо найти общее решение этих уравнений. В таких случаях говорят, что надо решить систему уравнений.

Систему уравнений принято записывать с помощью фигурной скобки. Полученную систему уравнений можно записать в виде:
$$\begin{cases} x + y = 57, \\ x - y = 5. \end{cases}$$

Пара чисел $x = 31$ и $y = 26$ удовлетворяет каждому уравнению, так как при их подстановке в уравнения получаем верные числовые равенства:
$$\begin{cases} 31 + 26 = 57, \\ 31 - 26 = 5. \end{cases}$$

Поэтому такую пару чисел называют решением системы уравнений.

Решением системы уравнений с двумя переменными называется пара значений переменных, при которых каждое уравнение системы обращается в верное равенство. Решить систему уравнений – значит найти все ее решения или доказать, что решений нет.

В примере 1 было указано решение системы (оно является единственным). Система уравнений может и не иметь решений.

Пример 2

Рассмотрим систему линейных уравнений:
$$\begin{cases} x - 2y = 5, \\ -2x + 4y = 8. \end{cases}$$

Второе уравнение системы заменим равносильным. Для этого все его члены разделим на число (-2) и получим $x - 2y = -4$. Тогда система

уравнений имеет вид:
$$\begin{cases} x - 2y = 5, \\ x - 2y = -4. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что величина $x - 2y$ равна 5. Из второго уравнения та же величина $x - 2y$ равна (-4) . Очевидно, что при любых значениях x и y величина $x - 2y$ не может равняться двум различным числам 5 и -4 . Поэтому данная система уравнений решений не имеет.

Для решения систем уравнений можно использовать графики этих уравнений (графический способ решения). Достоинство такого способа решения – его наглядность, недостаток – приближенные значения решения.

Пример 3

Решим систему уравнений:
$$\begin{cases} 2x + y = 4, \\ x - 2y = -3. \end{cases}$$

Построим графики уравнений системы. Для этого из каждого уравнения выразим переменную y . При этом каждое уравнение системы за-

меняется равносильным. Получаем систему уравнений:
$$\begin{cases} y = 4 - 2x, \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}. \end{cases}$$

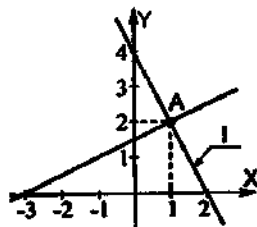


Рис. 2.33

Графиком первого уравнения является прямая 1, т. е. координаты всех точек этой прямой удовлетворяют такому уравнению. Графиком второго уравнения является прямая 2. Точка пересечения A этих прямых расположена и на первой и на второй прямых. Поэтому координаты этой точки удовлетворяют каждому уравнению системы, т. е. являются решением системы уравнений. Определяем координаты точки A и находим $x = 1$ и $y = 2$. (Вообще говоря, определить точки можно лишь прибли-

женно). Подстановкой значений x и y в данную систему
$$\begin{cases} 2 \cdot 1 + 2 = 4, \\ 1 - 2 \cdot 2 = -3, \end{cases}$$

убеждаемся, что $x = 1$ и $y = 2$ – решение этой системы. В примере 3 система имеет единственное решение.

Обсудим вопрос о количестве решений системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Общий вид такой системы
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

где x и y – неизвестные, $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ – некоторые числа. Если из каждого уравнения выразить переменную y , то систему (1) можно записать в виде:

$$\begin{cases} y = k_1x + d_1, \\ y = k_2x + d_2, \end{cases} \quad (2).$$

где k_1, k_2, d_1, d_2 – некоторые числа. В зависимости от расположения прямых, соответствующих каждому уравнению системы, возможны три варианта при решении системы.

1. Если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ (или $k_1 \neq k_2$), то прямые пересекаются и система имеет единственное решение.

Пример 4

Вернемся еще раз к примеру 3. В этом примере рассматривалась система

$$\begin{cases} 2x + y = 4, \\ x - 2y = -3. \end{cases}$$

Для такой системы $a_1 = 2, b_1 = 1, a_2 = 1, b_2 = -2$. Проверим условие $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ и получим $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-2}$. После преобразований система имела вид:

$$\begin{cases} y = -2x + 4, \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Для такой системы $k_1 = -2$ и $k_2 = \frac{1}{2}$. Для такой системы угловые коэффициенты прямых различны $k_1 \neq k_2$. Видно, что для рассматриваемой системы условие единственности решения было выполнено.

Разумеется, система имела единственное решение.

2. Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ (или $k_1 = k_2$ и $d_1 \neq d_2$), то прямые параллельны и система не имеет решений.

Пример 5

Вернемся к примеру 2. Рассматривалась система

$$\begin{cases} x - 2y = 5, \\ -2x + 4y = 8. \end{cases}$$

Для такой системы $a_1 = 1, a_2 = -2, b_1 = -2, b_2 = 4, c_1 = 5, c_2 = 8$.

Проверим условие $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ и получим $\frac{1}{-2} = \frac{-2}{4} \neq \frac{5}{8}$. Из каждого

уравнения выразим переменную y и запишем систему в виде:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}, \\ y = \frac{1}{2}x + 4. \end{cases}$$

Для этой системы $k_1 = \frac{1}{2}$, $k_2 = \frac{1}{2}$, $d_1 = -\frac{5}{2}$, $d_2 = 4$. Поэтому условия $k_1 = k_2$ и $d_1 \neq d_2$ выполнены. Видно, что для рассматриваемой системы условие отсутствия решений было выполнено. Поэтому такая система решений не имеет.

В отсутствии решений легко убедиться, если построить графики первого уравнения $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ (прямая 1) и второго уравнения $y = \frac{1}{2}x + 4$ (прямая 2), видно, что прямые 1 и 2 параллельны. Тогда эти прямые не имеют общих точек, т. е. нет такой точки, координаты которой были бы решением и первого и второго уравнений. Поэтому данная система решений не имеет.

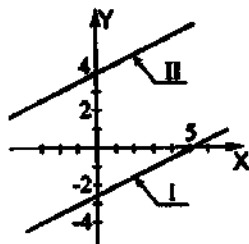


Рис. 2.34.

Если система уравнений не имеет решений, то она называется несовместной.

3. Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ (или $k_1 = k_2$ и $d_1 = d_2$), то прямые совпадают и система имеет бесконечно много решений.

Пример 6

Рассмотрим систему $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ -2x + 4y = \end{cases}$

Для такой системы $a_1 = 1$, $a_2 = -2$, $b_1 = -2$, $b_2 = 4$, $c_1 = 5$, $c_2 = -10$. Проверим условие $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ и получим $\frac{1}{-2} = \frac{-2}{4} = \frac{5}{-10}$. Второе уравнение разделим на число (-2) и из каждого уравнения выразим переменную y .

Запишем систему в виде:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}, \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Для этой системы $k_1 = \frac{1}{2}$, $k_2 = \frac{1}{2}$, $d_1 = -\frac{5}{2}$, $d_2 = -\frac{5}{2}$.

Очевидно, что равенства $k_1 = k_2$ и $d_1 = d_2$ выполнены. Так как условия бесконечного множества решений выполнены, то система имеет бесконечное множество решений. Если построить графики уравнений $x - 2y = 5$ и $-2x + 4y = -10$, то они совпадают. Любая точка, расположенная на построенной прямой, имеет координаты, которые являются решением данной системы. Очевидно, что таких решений бесконечно много.

Однако не все пары чисел x и y являются решениями этой системы.

Решениями будут такие пары чисел x и y , для которых $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$.

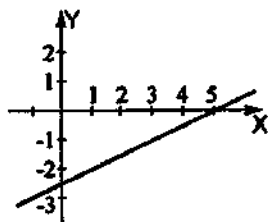


Рис. 2.35

Если система имеет бесконечно много решений, то она называется **неопределенной**.

Пример 7

При каких значениях a система уравнений
$$\begin{cases} (2a-1)x + 3y = 7a+1, \\ (a+2)x + 2y = 5a-3. \end{cases}$$
 имеет единственное решение?

Запишем условие единственности решения: $\frac{2a-1}{a+2} \neq \frac{3}{2}$.

Используем свойство пропорции: $2(2a-1) \neq 3(a+2)$ и $4a-2 \neq 3a+6$, откуда $a \neq 8$. Итак, при всех значениях a , кроме $a = 8$, данная система имеет единственное решение.

Пример 8

При каком значении a система уравнений
$$\begin{cases} (2a-1)x + 3y = 7a+1, \\ (a+2)x + 2y = 5a-3. \end{cases}$$
 несовместна?

Запишем условие несовместимости системы: $\frac{2a-1}{a+2} = \frac{3}{5} \neq \frac{7a+1}{5a-3}$.

Сначала рассмотрим равенство $\frac{2a-1}{a+2} = \frac{3}{5}$. По свойству пропорции получаем: $5(2a-1) = 3(a+2)$ или $10a-5 = 6a+3$, или $4a=8$, откуда $a=2$. Теперь проверим неравенство $\frac{3}{5} \neq \frac{7a+1}{5a-3}$. При подстановке значения $a=2$ имеем: $\frac{3}{5} \neq \frac{7 \cdot 2 + 1}{5 \cdot 2 - 3}$ или $\frac{3}{5} \neq \frac{15}{7}$ (верное неравенство). Итак, при $a=2$ данная система несовместна.

Пример 9

При каком значении a система уравнений $\begin{cases} (2a-1)x + 3y = 7a+1, \\ (a+1)x + 6y = 11a+5. \end{cases}$ неопределенна?

Укажите решения системы.

Запишем условие неопределенности системы: $\frac{2a-1}{a+1} = \frac{3}{6} = \frac{7a+1}{11a+5}$.

Сначала рассмотрим равенство $\frac{2a-1}{a+1} = \frac{3}{6}$ или $\frac{2a-1}{a+1} = \frac{1}{2}$. По свойству пропорции получаем: $2(2a-1) = a+1$ или $4a-2 = a+1$, или $3a=3$, откуда $a=1$.

Теперь проверим равенство $\frac{3}{6} = \frac{7a+1}{11a+5}$.

При подстановке значения $a=1$ имеем $\frac{3}{6} = \frac{7 \cdot 1 + 1}{11 \cdot 1 + 5}$ или $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (верное равенство). Итак, при $a=1$ данная система неопределенна.

Подставим значение $a=1$ в данную систему и получим: $\begin{cases} x+3y=8, \\ 2x+6y=16. \end{cases}$

Поделим второе уравнение на число 2. Имеем систему $\begin{cases} x+3y=8, \\ x+3y=8. \end{cases}$

Решением такой системы будет любая пара чисел x и y , в которой $x = 8 - 3y$, а y — произвольное число.

III. Задание на уроке

№ 1121; 1122 (а); 1123 (а); 1124 (б, г); 1125 (а); 1126 (б, в, е); 1128 (а).

IV. Контрольные вопросы

— Что называется решением системы уравнений с двумя переменными?

- Что значит решить систему уравнений?
- Сколько решений может иметь система линейных уравнений с двумя переменными?
- Напишите общий вид системы линейных уравнений с двумя переменными.
- Запишите условие единственности решения системы.
- Напишите условие несовместности системы линейных уравнений.
- Запишите условие неопределенности системы уравнений.

V. Задание на дом

№1120; 1122 (б); 1123 (б); 1124 (б, г); 1125 (а); 1126 (б, в, е); 1128 (а).

VI. Творческие задания

1. При каком значении параметра a система уравнений имеет данное решение:

- а) $\begin{cases} 2ax + 3y = 10, \\ 5x + 4ay = 5a + 11 \end{cases} \quad (1; 2);$
- б) $\begin{cases} 4x + 7ay = 8 - 7a, \\ 3ax - 5y = 6a + 5 \end{cases} \quad (2; -1);$
- в) $\begin{cases} (2a + 3)x + (a + 1)y = 1, \\ 5ax + 4(a - 1)y = 7 + 2a \end{cases} \quad (-1; 1);$
- г) $\begin{cases} (3a - 1)x + 2ay = a + 3, \\ (2a + 1)x - (a + 1)y = 2a - 1 \end{cases} \quad (1; 1);$
- д) $\begin{cases} 3x - 5y = 2a + 17, \\ 2ax + 3y = 4a - 2 \end{cases} \quad (1; a);$
- е) $\begin{cases} 2x - 3y = a - 10, \\ 5x + 4y = 20 + 3a \end{cases} \quad (a; 2a).$

(Ответы: а) $a \neq 2$, б) a – любое, в) $a = -3$, г) $a = 1$, д) $a = -2$, е) $a = 2$.)

2. При каких значениях a система имеет единственное решение:

- а) $\begin{cases} 3ax + 2y = a + 3, \\ 6x + 4y = 2a + 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5ax + 3y = 2a - 1, \\ 3x + 2y = a + 1; \end{cases}$
- в) $\begin{cases} ax + 2y = 3a + 5, \\ 2x + ay = a - 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x + ay = 2a + 3, \\ 4ax + 3y = a - 4. \end{cases}$

(Ответы: а) $a \neq 1$; б) $a \neq \frac{9}{10}$; в) $a \neq \pm 2$; г) $a \neq \pm 1, 5$.)

3. При каком значении параметра a система уравнений несовместна:

- а) $\begin{cases} 2ax + 3y = a + 1, \\ 6x + y = 2a - 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x - 3ay = 3a + 1, \\ 10x + 6a = 5a + 7; \end{cases}$

$$\text{в) } \begin{cases} (a-1)x + (2a-1)y = 7a-1, \\ 2x + 5y = 3a+2; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} (3a-1)x + 2y = 4a+1, \\ ax + y = 3a. \end{cases}$$

(Ответы: а) $a = 9$; б) $a = -1$; в) $a = 3$; г) $a = 1$.)

4. При каком значении a система уравнений неопределенна:

$$\text{а) } \begin{cases} 3ax - 2y = a - 2, \\ 3x + y = -a; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} (a-1)x + 3y = a + 2, \\ ax + 4y = 2a; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} ax + 2y = 5a, \\ 2x + ay = a + 8; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} (a-1)x + y = 2a - 3, \\ 3x + (a+1)y = a - 5. \end{cases}$$

(Ответы: а) $a = -2$, б) $a = 4$, в) $a = 2$, г) $a = -2$.)

VII. Подведение итогов урока

§ 16. Решение систем линейных уравнений

Урок 116. Способ подстановки

Цель: использование способа подстановки для решения систем линейных уравнений.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

- 1) Что называется решением системы уравнений с двумя переменными?
- 2) Запишите условие единственности решения системы уравнений.
- 3) Графически решите систему уравнений:
$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ y - x = 1. \end{cases}$$
- 4) При каких значениях a система уравнений
$$\begin{cases} 3x + 5y = a + 2, \\ 6a + ay = 2a \end{cases}$$
 несовместна?

Вариант 2

- 1) Что значит решить систему уравнений?

2) Напишите условие несовместности систем уравнений.

3) Графически решите систему уравнений: $\begin{cases} 2x + y = 4, \\ 2y - x = 3. \end{cases}$

4) При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} ax + 2y = a + 3, \\ 2x + 4y = 5a \end{cases}$ имеет

единственное решение?

III. Изучение нового материала

Системы уравнений с двумя переменными, которые имеют одни и те же решения или не имеют решений, называются равносильными.

Пример 1

а) Две системы уравнений $\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 4x + 5y = 13 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x - 2y = 4, \\ 7x - 9y = 5 \end{cases}$ равносиль-

ны, так как имеют одно и то же решение (2; 1).

б) Две системы уравнений $\begin{cases} 3x - 2y = 5, \\ -6x + 4y = 7 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x + 5y = 6, \\ -4x - 10y = 8 \end{cases}$ равно-

сильны, так как каждая из них не имеет решений.

При решении системы уравнений с помощью преобразований ее заменяют более простой равносильной системой. Одним из распространенных способов решения систем уравнений является способ подстановки. Рассмотрим его на примере.

Пример 2

Решим систему уравнений: $\begin{cases} 2x + y = 4, \\ 3x - 2y = -1. \end{cases} \quad (1)$

Из первого уравнения выразим переменную y через x и получим $y = 4 - 2x$ (заметим, что это уравнение равносильно исходному). Подставим это выражение во второе уравнение вместо переменной y и получим

систему: $\begin{cases} y = 4 - 2x, \\ 3x - 2(4 - 2x) = -1. \end{cases} \quad (2)$

Можно показать, что системы (1) и (2) равносильны.

В системе (2) второе уравнение содержит только одну переменную x . Решим это линейное уравнение. Получаем: $3x - 8 + 4x = -1$ или $1x = 7$, откуда $x = 1$. Подставим значение $x = 1$ в первое уравнение системы (2) и найдем $y = 4 - 2 \cdot 1 = 2$. Пара чисел (1; 2) – решение системы (2), а значит, и данной системы (1).

В равносильности систем (1) и (2) легко убедиться. Решение $x = 1$, $y = 2$ является единственным решением системы (2). В системе (1) ко-

эффициенты при неизвестных удовлетворяют условию $\frac{3}{2} \neq \frac{1}{-2}$.

Поэтому такая система имеет единственное решение.

Подстановкой значений $x = 1$, $y = 2$ в эту систему убеждаемся, что такая пара чисел и есть решение системы (1).

Также можно убедиться в равносильности систем (1) и (2), используя графический способ. Для этого нужно показать, что графики уравнений системы (1) пересекаются в той же точке, что и графики уравнений системы (2). Сначала построим график первого уравнения системы (1) – прямую 1, затем график второго уравнения – прямую 2. Они пересекаются в точке А.

Графиком первого уравнения системы (2) является прямая 1. График второго уравнения – вертикальная прямая $x = 1$ (прямая 3). Видно, что эти графики также пересекаются в точке А. Поэтому системы (1) и (2) равносильны.

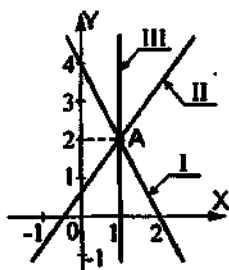


Рис. 2.36

Система линейных уравнений с двумя переменными была решена методом подстановки. Заметим, что таким способом решаются и системы нелинейных уравнений.

При решении систем этим методом:

- 1) выражают из одного уравнения системы одну переменную через другую;
- 2) подставляют полученное выражение вместо переменной в другое уравнение;
- 3) решают полученное уравнение с одной переменной;
- 4) находят соответствующее значение второй переменной.

Пример 3

Решим систему уравнений:
$$\begin{cases} 3x + 4y = 5, \\ 2x - 5y = 3. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения переменную y через x . Имеем:

$$4y = 5 - 3x \text{ и } y = \frac{5 - 3x}{4}.$$

Подставим во второе уравнение вместо y полученное выражение $\frac{5 - 3x}{4}$. Получаем уравнение с одной переменной: $2x - 5 \cdot \frac{5 - 3x}{4} = 3$.

Умножим все члены уравнения на число 4. Имеем: $8x - 5(5 - 3x) = 12$

или $8x - 25 + 15x = 12$, или $23x = 37$, откуда $x = \frac{37}{23}$.

Подставим в уравнение $y = \frac{5-3x}{4}$ вместо x число $\frac{37}{23}$ и получим:

$$y = \frac{5-3 \cdot \frac{37}{23}}{4} = \left(5 - 3 \cdot \frac{37}{23}\right) : 4 = \frac{5 \cdot 23 - 3 \cdot 37}{23} : 4 = \frac{15 - 111}{23} : 4 = \frac{1}{23}.$$

Итак, единственное решение этой системы $x = \frac{37}{23}$ и $y = \frac{1}{23}$.

Заметим, что найти это решение графическим способом можно лишь приближенно.

Способом подстановки можно решать и системы уравнений, содержащих параметры.

Пример 4

При каких значениях параметра a решением системы уравнений

$$\begin{cases} 2x - y = -3, \\ 3x + 2y = 7a - 1 \end{cases} \text{ будет неотрицательная пара чисел?}$$

Из первого уравнения выразим переменную $y = 2x + 3$ и подставим во второе уравнение. Получаем: $3x + 2(2x + 3) = 7a - 1$ или $3x + 4x + 6 = 7a - 1$, или $7x = 7a - 7$.

Разделим все части равенства на число 7 и найдем $x = a - 1$. Используя выражение $y = 2x + 3$, находим $y = 2(a - 1) + 3 = 2a - 2 + 3 = 2a + 1$. При каждом значении параметра a система уравнений имеет единственное решение $x = a - 1$ и $y = 2a + 1$. По условию такие числа должны быть неотрицательными. Число $x = a - 1$ неотрицательно при значениях a не меньших числа 1 (т. е. $a \geq 1$). При этих a число $y = 2a + 1$ будет положительным.

IV. Задание на уроке

№ 1132 (а); 1133 (а, б); 1135 (а, б); 1137; 1140 (а, б); 1141 (б); 1142 (в); 1143 (а).

V. Контрольные вопросы

- Какие системы уравнений называются равносильными?
- Как решить систему уравнений методом подстановки?

VI. Задание на дом

№ 1132 (б); 1133 (г, д); 1135 (в, г); 1138; 1140 (в, г); 1141 (а); 1142 (а); 1143 (б).

VII. Творческие задания

1. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x - y = 1, \\ 3x + 2y = 7a - 2; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + 3y = 4a + 3, \\ 3x - 2y = a - 5; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 2x + y = 4a - 1, \\ 5x - 3y = 19 - 6a; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 3x - 4y = 2a - 7, \\ x + 3y = 5a + 2. \end{cases}$$

(Ответы: а) $x = a, y = 2a - 1$; б) $x = a - 1, y = a + 1$; в) $x = 2, y = 2a - 3$; г) $x = 2a - 1, y = a + 1$.)

1. При каком значении параметра a решение $(x_0; y_0)$ системы уравнений удовлетворяет условию?

$$\text{а) } \begin{cases} 6x - 7y = 4a, \\ 2x + y = 8a, \end{cases} \quad x_0 + y_0 > 10;$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x + 2y = 8a - 1, \\ x + 3y = 5a + 2, \end{cases} \quad x_0 + y_0 = -18;$$

$$\text{в) } \begin{cases} 5x + y = 7a - 5, \\ 2x + 3y = 8a - 2, \end{cases} \quad y_0 - 2x_0 > 0;$$

$$\text{г) } \begin{cases} 4x - y = 2a - 4, \\ x + 2y = 5a - 1, \end{cases} \quad 2x_0 > y_0.$$

(Ответы: а) $a > 2$ (решение $x_0 = 3a, y_0 = 2a$); б) $a = -6$ (решение $x_0 = 2a - 1, y_0 = a + 1$); в) при всех a (решение $x_0 = a - 1, y_0 = 2a$); г) нет таких a (решение $x_0 = a - 1, y_0 = 2a$).

VIII. Подведение итогов урока

Урок 117. Способ сложения

Цель: освоить еще один способ решения систем уравнений – способ сложения.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Способом подстановки решите систему уравнений:

$$1) \begin{cases} 3x + 5y = 11, \\ 5x - 2y = 8; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x + 7y = 9a - 5, \\ 3x - 5y = 2 - 2a. \end{cases}$$

Вариант 2

Способом подстановки решите систему уравнений:

$$1) \begin{cases} 4x - 3y = 5, \\ 3x + 4y = 10; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x + 2y = 7a + 6, \\ 4x - 3y = 8 - 2a. \end{cases}$$

III. Изучение нового материала

Рассмотрим еще один способ решения систем линейных уравнений – способ сложения. При таком способе решения данная система уравнений заменяется равносильной системой, в которой одно из уравнений содержит только одну переменную.

Пример 1

Решим систему уравнений:
$$\begin{cases} 3x + 2y = 8, \\ 4x - 2y = 6 \end{cases} \quad (1)$$

Заметим, что в уравнениях системы коэффициенты при переменной y являются противоположными числами. Сложим почленно уравнения системы: $3x + 2y + 4x - 2y = 8 + 6$. Получим линейное уравнение с одной переменной x , а именно $7x = 14$. Заменим одно из уравнений системы (1), например, первое, полученным уравнением $7x = 14$.

Имеем равносильную систему:
$$\begin{cases} 7x = 14, \\ 4x - 2y = 6 \end{cases} \quad (2)$$

Решим систему (2). Из первого уравнения находим $x = 2$.

Подставим это значение x во второе уравнение системы. Имеем линейное уравнение с переменной y : $4 \cdot 2 - 2y = 6$ или $8 - 2y = 6$, или $-2y = -2$, откуда $y = 1$. Пара чисел (2; 1) – решение системы (2), а, следовательно, и равносильной системы (1).

Покажем, что системы (1) и (2) равносильны. Для системы (1) выполняется условие единственности решения: $\frac{3}{4} \neq \frac{2}{-2}$.

Подстановкой найденного решения системы (2) $x = 2$, $y = 1$, убеждаемся, что оно является и решением системы (1). В равносильности систем (1) и (2) можно убедиться и графически. Решим сначала графически систему (1). Построим график уравнения $3x + 2y = 8$ (прямая 1) и график уравнения $4x - 2y = 6$ (прямая 2). Эти прямые пересекаются в точке А. Координаты этой точки являются решением системы (1).

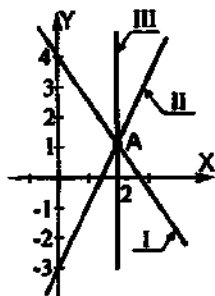


Рис. 2.37

Теперь графически решим систему (2). Графиком уравнения $7x = 14$ является прямая $x = 2$ — прямая 3. Графиком второго уравнения $4x - 2y = 6$ является прямая 2. Видно, что прямые 2 и 3 пересекаются в той же точке A, т. е. координаты этой точки также будут решением системы (2). Следовательно, системы (1) и (2) равносильны.

Из разобранных примеров видно, что при сложении уравнений системы получилось уравнение только с одной переменной. В качестве второго уравнения системы можно выбрать любое из уравнений данной системы. В результате таких преобразований была получена система, равносильная данной. В этом состоит суть метода сложения.

Пример 2

Решим систему уравнений $\begin{cases} 3x - 5y = 9, \\ 2x - 7y = 17 \end{cases}$ способом сложения.

В отличие от предыдущего примера в этом случае коэффициенты при y (а также и при x) не являются противоположными числами. Поэтому сложение уравнений не позволит получить уравнение с одной переменной. Следовательно, необходимо добиться того, чтобы в уравнениях коэффициенты при любой переменной, например, при y стали противоположными числами.

Коэффициенты при y являются простыми числами 5 и 7. Поэтому умножим все члены первого уравнения на число 7, второе уравнение — на число (-5) . При этом уравнения будут равносильными и система также равносильна данной $\begin{cases} 21x - 35y = 63, \\ -10x + 35y = -85. \end{cases}$

В такой системе коэффициенты при y — противоположные числа. Поэтому сложим уравнения системы и получим линейное уравнение с одной переменной: $21x - 35y - 10x + 35y = 63 - 85$ или $11x = -22$.

Запишем систему, равносильную данной. В качестве первого уравнения выберем полученное уравнение, в качестве второго уравнения — например, первое уравнение данной системы. Имеем: $\begin{cases} 11x = -22, \\ 3x - 5y = 9. \end{cases}$

Из первого уравнения найдем $x = -1$ и подставим это значение во второе уравнение. Получаем линейное уравнение с одной переменной: $3 \cdot (-2) - 5y = 9$ или $-6 - 5y = 9$, или $-5y = 9 + 6$, или $-5y = 15$, откуда $y = -3$. Итак, данная система уравнений имеет единственное решение $(-2; -3)$.

Пример 3

Решим систему уравнений:
$$\begin{cases} 6x + 5y = 7, \\ 4x - 3y = 11. \end{cases}$$

Избавимся теперь от переменной x . Коэффициенты при x в уравнениях — числа 6 и 4 уже не являются простыми числами (составные числа). Найдем их наименьшее общее кратное НОК $(6; 4) = 12$. Так как $12 : 6 = 2$ и $12 : 4 = 3$, то умножим все члены первого уравнения на число 2, второго уравнения — на число (-3) . Получаем равносильную систему уравнений:
$$\begin{cases} 12x + 10y = 14, \\ -12x + 9y = 33. \end{cases}$$

Сложим уравнения этой системы и получим линейное уравнение с переменной y : $12x + 10y - 12x + 9y = 14 - 33$ или $19y = -19$.

Запишем равносильную систему уравнений. В качестве первого уравнения выберем полученное уравнение, в качестве второго уравнения — второе уравнение данной системы.

Имеем:
$$\begin{cases} 19y = -19, \\ 4x - 3y = 11. \end{cases}$$

Из первого уравнения найдем $y = -1$ и подставим это значение во второе уравнение. Получаем линейное уравнение с одной переменной:

$4x - 3 \cdot (-1) = 11$ или $4x = 8$, откуда $x = 2$. Итак, данная система уравнений имеет единственное решение $(2; -1)$.

Из рассмотренных примеров следует, что при решении систем линейных уравнений методом сложения:

1) умножают уравнения системы, подбирая множители так, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали противоположными числами;

2) складывают почленно левые и правые части уравнений системы;

3) решают полученное уравнение с одной переменной;

4) находят соответствующее значение второй переменной.

Отметим, что если в уравнениях системы коэффициенты при одной из переменных являются противоположными числами, то при решении пункт 1 пропускают и начинают сразу с пункта 2.

Способ сложения можно использовать и при решении систем уравнений с параметрами.

Пример 4

Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы
$$\begin{cases} 2x + 3y = 5a + 4, \\ 4x + 5y = 9a + 6. \end{cases}$$

При каких значениях a величина $2x_0 + y_0 \geq 0$?

Сначала решим данную систему методом сложения. Для этого умножим все члены первого уравнения на число (-2) и получим равносильную систему:
$$\begin{cases} -4x - 6y = -10a - 8, \\ 4x + 5y = 9a + 6. \end{cases}$$

Сложим уравнения системы почленно. Получаем линейное уравнение с одной переменной: $-4x - 6y + 4x + 5y = -10a - 8 + 9a + 6$ или $-y = -a - 2$, откуда $y = a + 2$.

Подставим это значение y , например, в первое уравнение данной системы: $2x + 3(a + 2) = 5a + 4$ или $2x + 3a + 6 = 5a + 4$, или $2x = 5a + 4 - 3a - 6$, или $2x = 2a - 2$, откуда $x = a - 1$.

Итак, для каждого значения параметра a данная система уравнений имеет единственное решение $x_0 = a - 1$, $y_0 = a + 2$.

Найдем величину $2x_0 + y_0 = 2(a - 1) + (a + 2) = 2a - 2 + a + 2 = 3a$.

По условию эта величина должна быть неотрицательной, т. е. $3a \geq 0$. Очевидно, что такое неравенство выполняется только при неотрицательных значениях a , т. е. при $a \geq 0$.

IV. Задание на уроке

№ 1147 (а); 1148 (а); 1149 (б); 1151 (а); 1152 (а); 1153; 1156; 1157 (а); 1158 (а); 1159 (б); 1161 (а).

V. Контрольные вопросы

- Основная цель при решении систем уравнений методом сложения.
- Как решить систему уравнений методом сложения? Объясните на примере.

VI. Задание на дом

№ 1147 (а); 1148 (б); 1149 (а); 1151 (б); 1152 (б); 1154; 1155; 1157 (б); 1158 (а); 1159 (а, в); 1161 (б).

VI. Творческие задания

Решите задания 1 и 2 из творческих заданий предыдущего урока методом сложения.

Урок 118–119. Решение задач с помощью систем уравнений

Цель: использование систем линейных уравнений для решения текстовых задач.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Способом сложения решите систему линейных уравнений:

$$1) \begin{cases} 3x + 5y = 11, \\ 5x - 2y = 8; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x + 7y = 9a - 5, \\ 3x - 5y = 2 - 2a. \end{cases}$$

Вариант 2

Способом сложения решите систему линейных уравнений:

$$1) \begin{cases} 4x - 3y = 5, \\ 3x + 4y = 10; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x + 2y = 7a + 6, \\ 4x - 3y = 8 - 2a. \end{cases}$$

III. Изучение нового материала

При решении текстовых задач с помощью систем уравнений:

1) обозначают неизвестные величины буквами;
2) используя условия задачи, для этих букв составляет систему уравнений;

3) решают полученную систему уравнений;

4) объясняют результат в соответствии с условием задачи.

Пример 1

В трех тетрадах и четырех блокнотах вместе 108 страниц. В двух блокнотах столько же страниц, сколько их в трех тетрадах. Сколько страниц в каждой тетради и в каждом блокноте?

Пусть в каждой тетради x страниц, в каждом блокноте — y страниц. Тогда в трех тетрадах $3x$ страниц, а в четырех блокнотах $4y$ страниц. По условию задачи общее количество страниц в этих тетрадах и блокнотах равно 108. Поэтому получаем первое уравнение: $3x + 4y = 108$.

В двух блокнотах $2y$ страниц, в трех тетрадах $3x$ страниц. По условию задачи эти количества страниц равны. Тогда имеем второе уравнение: $2y = 3x$.

Итак, получили систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 108, \\ 2y = 3x. \end{cases}$$

Решим ее, например, методом подстановки. Из второго уравнения выразим переменную $y = \frac{3}{2}x$ и подставим в первое уравнение. Имеем:

$3x + 4 \cdot \frac{3}{2}x = 108$ или $3x + 6x = 108$, или $9x = 108$, откуда $x = 12$. Подста-

вим это значение x в выражение $y = \frac{3}{2}x$ и найдем $y = \frac{3}{2} \cdot 12 = 18$.

Вернемся к началу задачи и вспомним обозначения. Итак, получили, что в тетради 12 страниц, а в блокноте 18 страниц.

Пример 2

Можно ли разменять купюру в 1000 рублей купюрами в 10 рублей и 50 рублей, если для размена можно использовать 26 купюр?

Предположим, что для размена использовалось x купюр в 10 рублей и y купюр в 50 рублей. По условию для размена можно использовать 26 купюр. Поэтому получаем первое уравнение $x + y = 26$. Учтем, что x купюр по 10 рублей стоят $10x$ рублей, а y купюр по 50 рублей стоят $50y$ рублей. Тогда общая стоимость этих купюр $10x + 50y$ по условию задачи должна составлять 1000 рублей. Имеем второе уравнение: $10x + 50y = 1000$.

Получили систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} x + y = 26, \\ 10x + 50y = 1000. \end{cases}$$

Решим эту систему способом сложения. Для этого умножим все члены первого уравнения на число (-50) и получим равносильную систему:

$$\begin{cases} -50x - 50y = -1300, \\ 10x + 50y = 1000. \end{cases}$$

Сложим уравнения системы и получим линейное уравнение с одной переменной: $-50x - 50y + 10x + 50y = -1300 + 1000$ или $-40x = -300$, откуда $x = 7,5$. Подставим это значение в первое уравнение данной системы: $7,5 + y = 26$ и найдем $y = 18,5$.

Вернемся к обозначениям в начале задачи. Получаем, что для размена надо использовать 7,5 купюры в 10 рублей и 18,5 купюры в 50 рублей. По смыслу задачи числа x и y могут быть только натуральными числами или нулем. Поэтому разменять купюру в 1000 рублей заданным способом нельзя.

IV. Задание на уроке

№ 1165; 1167; 1170; 1172; 1175; 1177; 1181; 1182; 1186.

V. Домашнее задание

№ 1166; 1168; 1169; 1171; 1173; 1174; 1176; 1178; 1179; 1180; 1184; 1185.

VI. Подведение итогов урока

Урок 120. Некоторые системы нелинейных уравнений

Цель: знакомство с простейшими системами нелинейных уравнений.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1) Основание равнобедренного треугольника на 5 см больше его боковой стороны. Найти основание и боковое основание и боковую сторону, если периметр треугольника равен 71 см.

2) Вес 12 кирпичей и 8 досок равен 92 кг. Вес 5 кирпичей больше веса 2 досок на 1 кг. Найдите вес одного кирпича и одной доски.

Вариант 2

1) Основание равнобедренного треугольника на 6 см больше его боковой стороны. Найти основание и боковое основание и боковую сторону, если периметр треугольника равен 76 см.

2) Вес 16 кирпичей и 5 досок равен 94 кг. Вес 6 кирпичей больше веса 3 досок на 6 кг. Найдите вес одного кирпича и одной доски.

III. Изучение нового материала

При решении систем нелинейных уравнений используются те же способы, что и в случае систем линейных уравнений: графический способ, способ подстановки и способ сложения.

Пример 1

Решим систему уравнений $\begin{cases} x^2 - y = 1, \\ y - x = 1 \end{cases}$ графическим способом.

Из каждого уравнения системы выразим переменную y через переменную x . Получаем равносильную систему уравнений: $\begin{cases} y = x^2 - 1, \\ y = x + 1. \end{cases}$

Построим график функции $y = x^2 - 1$ (парабола 1) и график функции $y = x + 1$ (прямая 2). Видно, что графики пересекаются в двух точках А и В. Следовательно, данная система имеет два решения. По рисунку найдем координаты этих точек А $(-1; 0)$ и В $(2; 3)$. Поэтому решения данной системы $(-1; 0)$ и $(2; 3)$.

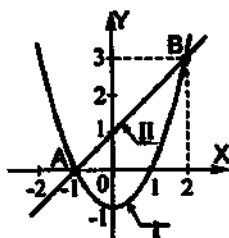


Рис. 2.38

Пример 2

Решим систему уравнений $\begin{cases} y+|x|=4, \\ 3y+x^2=12. \end{cases}$ методом подстановки.

Из первого уравнения системы выразим переменную y через переменную x . Получим выражение $y=4-|x|$ и подставим его во второе уравнение. Имеем нелинейное уравнение с одной неизвестной: $3(4-|x|)+x^2=12$ или $12-3|x|+x^2=12$, или $x^2-3|x|=0$.

Учтем свойство модуля $x^2=|x|^2$ и запишем уравнение в виде $|x|^2-3|x|=0$. Разложим его левую часть на множители: $|x| \cdot (|x|-3)=0$.

Произведение двух множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Имеем уравнения: $|x|=0$ (так как модуль величины x равен нулю, то и сама величина $x=0$) и $|x|-3=0$ (или $|x|=3$, тогда величина $x=3$ или $x=-3$). Для каждого значения x по формуле $y=4-|x|$ найдем соответствующее значение y . Получаем: для $x=0$: $y=4$, для $x=\pm 3$: $y=4-3=1$.

Итак, данная система уравнений имеет три решения $(0; 4)$, $(3; 1)$ и $(-3; 1)$.

Пример 3

Решим систему уравнений $\begin{cases} 2y^2+3|x|=5, \\ 3y-2|x|=1 \end{cases}$ способом сложения.

Умножим первое уравнение на число 2, второе уравнение — на число 3 и получим равносильную систему уравнений: $\begin{cases} 4y^2+6|x|=10, \\ 9y-6|x|=3. \end{cases}$

Сложим уравнения системы и получим квадратное уравнение с одной переменной: $4y^2+9y=13$ или $4y^2+9y-13=0$. Решим это уравнение, разложив его левую часть на множители.

Для этого представим $9y$ в виде $9y=13y-4y$, сгруппируем члены уравнения и вынесем общие множители за скобки. Получаем: $4y^2+13y-4y-13=0$ или $y(4y+13)-(4y+13)=0$, или $(4y+13)(y-1)=0$.

Так как произведение множителей равно нулю, то один из множителей равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $4y+13=0$ (его корень $y=-\frac{13}{4}$) и $y-1=0$ (корень $y=1$).

Для каждого значения y найдем соответствующее значение x из второго уравнения $3y-2|x|=1$ данной системы. При $y=-\frac{13}{4}$ получаем:

$$3 \cdot \left(-\frac{13}{4}\right) - 2|x| = 1 \text{ или } -\frac{39}{4} - 2|x| = 1.$$

Выразим из этого уравнения $|x| = -\frac{43}{8}$. Так как модуль любой величины неотрицательное число, то такое уравнение решений не имеет. При $y = 1$ имеем $3 - 2|x| = 1$, откуда $|x| = 1$. Поэтому сама величина $x = 1$ или $x = -1$.

Итак, данная система уравнений имеет два решения: $(1; 1)$ и $(-1; 1)$.

Аналогичным способом решаются системы уравнений с параметрами.

Пример 4

Решим систему $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 2x - ay = 1, \end{cases}$ например, методом сложения. Умно-

жим второе уравнение на (-1) : $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ -2x + ay = -1. \end{cases}$

Сложим эти уравнения: $2x - y - 2x + ay = 1 - 1$ или $ay - y = 0$.

Вынесем за скобки: $y(a - 1) = 0$.

Так как произведение двух сомножителей обращается в нуль, то возможны два случая:

а) $y = 0$.

Подставив это значение в уравнения данной системы, получаем:

$$\begin{cases} 2x = 1, \\ 2x = 1, \end{cases} \text{ откуда } x = \frac{1}{2}.$$

б) $a - 1 = 0$, т. е. $a = 1$.

Подставим это значение a в данную систему и получим: $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 2x - y = 1. \end{cases}$

Очевидно, что такая система имеет бесконечно много решений: $x, y = 2x - 1$ (где x — любое число).

Итак, если $a \neq 1$, то система имеет единственное решение: $x = \frac{1}{2}, y = 0$;

если $a = 1$, то система имеет бесконечно много решений: $x, y = 2x - 1$ (где x — любое число).

В некоторых случаях при исследовании корней уравнения его удобно заменить системой уравнений и использовать графический способ.

Пример 5

В зависимости от параметра a определите количество корней уравнения $x^2 - 2x - a = 0$.

Запишем данное уравнение в виде $x^2 - 2x = a$ и рассмотрим функции $y = x^2 - 2x$ и $y = a$ (или систему уравнений) $\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ y = a. \end{cases}$

Изобразим графики этих функций (или графики уравнений системы). Графиком функции $y = x^2 - 2x$ является парабола 1. Ее можно построить, составив таблицу значений данной функции. Так как эта функция не зависит от параметра a , то при изменении параметра a ее график не меняется.

Графиком функции $y = a$ является прямая 2, параллельная оси абсцисс и проходящая через точку $(0; a)$. При изменении параметра a прямая 2 перемещается параллельно самой себе вдоль оси ординат.

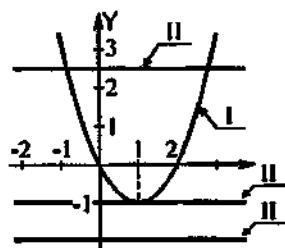


Рис. 2.39

Из рисунка видно, что при $a < -1$ парабола и прямая не пересекаются и данное уравнение корней не имеет. При $a = -1$ парабола и прямая имеют одну общую точку и уравнение имеет один корень. При $a > -1$ парабола и прямая пересекаются в двух точках и уравнение имеет два корня.

IV. Задание на уроке и на дом

1. Решите систему уравнений всеми изученными способами (графическим способом, способом подстановки, способом сложения):

а) $\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ x - y = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y = 0, \\ x - y = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} |x-1| - y = 0, \\ x - y = -1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} |x+1| - y = 0, \\ x + y = 3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2 - 2x - y = 0, \\ x - y = 0; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x^2 + 2x - y = 0, \\ y + x = 0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ |x| - y = 0; \end{cases}$

з) $\begin{cases} y + x^2 = 0, \\ y - |x| = 0; \end{cases}$

и) $\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y - |x-1| = 1; \end{cases}$

к) $\begin{cases} |x| - y = 0, \\ y - |x-2| = 0. \end{cases}$

(Ответы: а) (0; 0), (1; 1); б) (0; 0), (1; 1); в) (0; 1); г) (1; 2); д) (0; 0), (3; 3); е) (0; 0), (-3; -3); ж) (0; 0); (-1; 1); (1; 1); з) (0; 0); и) (1; 1); к) (1; 1).)

2. Используя графический способ, найдите число решений системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} |x| - y = 0, \\ y - x^2 = 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} y + |x| = 0, \\ y - |x - 1| = 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} y - |x - 1| = 0, \\ |x + 1| - y = 0; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} y - |x + 3| = 0, \\ |x + 1| - y = 0; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} y - |x| = 0, \\ x^2 - y = 1; \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} y - |x| = 1, \\ x^2 - y = 0; \end{cases}$$

$$\text{ж) } \begin{cases} y - |x| = 0, \\ |x| + y = 3; \end{cases}$$

$$\text{з) } \begin{cases} y - |x| = 1, \\ y + |x| = 5; \end{cases}$$

$$\text{и) } \begin{cases} |x - 1| - y = 0, \\ x - y = 1; \end{cases}$$

$$\text{к) } \begin{cases} y - |x| = 1, \\ x + y = 1; \end{cases}$$

$$\text{л) } \begin{cases} y - |x - 3| = 0, \\ y - |x - a| = 0; \end{cases}$$

$$\text{м) } \begin{cases} y - |x + 2| = 0, \\ y = |x - a|. \end{cases}$$

(Ответы: а) решений нет; б) решений нет; в) одно; г) одно; д) два; е) два; ж) два; з) два; и) бесконечно много; к) бесконечно много; л) при $a \neq 1$ одно решение, при $a = 1$ — бесконечно много; м) при $a \neq -2$ одно решение, при $a = -2$ — бесконечно много.)

3. При всех значениях параметра a , определите число решений уравнения:

$$\text{а) } |x - 3| = a;$$

$$\text{б) } |x + 2| = a;$$

$$\text{в) } |x - 3| = a - x;$$

$$\text{г) } |x + 5| = x - a;$$

$$\text{д) } (x - 1)^2 = a;$$

$$\text{е) } (3 - x)^2 = a;$$

$$\text{ж) } x^2 + 4x = 0;$$

$$\text{з) } x^2 - 4x = 0;$$

$$\text{и) } |x - 1| = |x| + a;$$

$$\text{к) } |x - 1| + |x + 2| = a; \quad \text{л) } |x - 3| + |x + 4| = a.$$

(Ответы: а), б) при $a < 0$ решений нет, при $a = 0$ — один корень, при $a > 0$ — два корня; в) при $a < 3$ — решений нет, при $a = 3$ — бесконечно много решений, при $a > 3$ — одно решение; г) при $a < -5$ — один корень, при $a = -5$ — бесконечно много решений, при $a > -5$ — решений нет; д), е) при $a < 0$ — решений нет, при $a = 0$ — один корень, при $a > 0$ — два корня; ж), з) при $a < -4$ — решений нет, при $a = -4$ — один корень, при $a > -4$ — два корня; и) при $a < -1$ и $a > 1$ — решений нет, при $a = -1$ и $a = 1$ — бесконечно много решений, при $-1 < a < 1$ — один корень; к) при $a < 3$ — решений нет, при $a = 3$ — бесконечно много решений, при $a > 3$ — два корня; л) при $a < 7$ — решений нет, при $a = 7$ — бесконечно много решений, при $a > 7$ — два корня.)

V. Подведение итогов урока

Уроки 121–122. Контрольная работа № 9 по теме «Системы линейных уравнений»

Контрольная работа составлена в 6 вариантах (варианты 1, 2 – самые простые; варианты 3, 4 – средней сложности; варианты 5, 6 – самые сложные). Степень сложности меняется не слишком резко. Поэтому можно рекомендовать следующий критерий оценки: при решении вариантов 1, 2 оценка «3» ставится за любые три решенные задачи, оценка «4» – за четыре задачи и оценка «5» – за пять задач. Одна задача дает школьникам некоторую свободу выбора. При тех же критериях оценки за решение вариантов 3, 4 добавляется к набранным баллам дополнительно 0,5 балла; за решение вариантов 5, 6 – дополнительно 1,0 балла (т. е. оценка «5» ставится уже за 4 задачи). Все задачи в варианте примерно равноценны. Может быть несколько тяжелее задачи 5, 6.

Перед проведением контрольной работы учащихся целесообразно ознакомить с критериями оценки и разной сложностью вариантов. Выбор вариантов может быть осуществлен учителем или предоставлен самим учащимся (в этом случае предполагается наличие копировальной техники в школе и избыточное количество заданий работы). После урока-разбора контрольной решение всех задач шести вариантов может быть вывешено на стенде. Разумеется, разобрать такое количество задач на уроке невозможно (да и не нужно).

Вариант 1

- Из пары чисел $(-2; 1)$; $(2; -1)$; $(1; 2)$ выберите решение системы линейных уравнений
$$\begin{cases} 7x + 4y = 10, \\ 2x + 3y = 1. \end{cases}$$

- Графическим способом решите систему линейных уравнений
$$\begin{cases} y - 2x = 0, \\ y - x = 2. \end{cases}$$

- Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 3x - 2y = 4, \\ y + 2y = 5. \end{cases}$$
 способом подстановки.

- Систему уравнений
$$\begin{cases} 3x + 4y = 14, \\ 5x + 2y = 14. \end{cases}$$
 решите способом сложения.

- Прямая $y = kx + b$ проходит через точки $A(2; 7)$ и $B(-1; -2)$. Найдите величины k и b .

- Пять досок и шесть брусьев весят 107 кг. Четыре доски тяжелее двух брусьев на 4 кг. Сколько весит одна доска и один брус?

Вариант 2

- Из пары чисел $(-2; 1)$; $(-1; 2)$; $(1; 2)$ выберите решение системы линейных уравнений
$$\begin{cases} 5x + 4y = 3, \\ 3x + 6y = 9. \end{cases}$$

2. Графическим способом решите систему линейных уравнений

$$\begin{cases} y - x = 0, \\ x + y = 4. \end{cases}$$

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 5x - 3y = -1, \\ y + 2x = 5. \end{cases}$ способом подстановки.

4. Систему уравнений $\begin{cases} 3x - 5y = 8, \\ 6x + 3y = 3. \end{cases}$ решите способом сложения.

5. Прямая $y = kx + b$ проходит через точки А (2; 7) и В (–1; –2). Найти величины k и b .

6. Семь досок и три кирпича вместе весят 71 кг. Три доски тяжелее двух кирпичей на 14 кг. Сколько весит одна доска и один кирпич?

Вариант 3

1. Из пары чисел (–2; 1); (3; –1); (2; –2) выберите решение системы нелинейных уравнений $\begin{cases} x^2 + 3|y - 1| = 15, \\ |1 - x| + y^2 = 3. \end{cases}$

2. Графическим способом решите систему линейных уравнений $\begin{cases} x^2 - y = 1, \\ y - |x| = -1. \end{cases}$

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2(x + y) - 3(x - y), \\ 5(x + y) - 7(x - y) = 2. \end{cases}$ способом подстановки.

4. Прямая $y = kx + b$ проходит через точки А (–1; –5) и В (2; 4). Найти величины k и b .

5. При всех значениях параметра a определите число решений системы уравнений $\begin{cases} 2x + 5y = 3, \\ x + ay = 2a. \end{cases}$

6. Решите уравнение $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 5|x - 2y + 3| = 0$.

Вариант 4

1. Из пары чисел (–2; 1); (3; –2); (2; –2) выберите решение системы нелинейных уравнений $\begin{cases} x^2 + 2|y - 1| = 1, \\ |2 - x| + y^2 = 5. \end{cases}$

2. Графическим способом решите систему линейных уравнений $\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y + |x| = 2. \end{cases}$

3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 2(x-y) + 3(x+y) = 39, \\ 3(x-y) - 2(x+y) = -13. \end{cases}$$
4. Прямая $y = kx + b$ проходит через точки А (-2; 4) и В (1; -5).
5. При всех значениях параметра a определите число решений системы уравнений
$$\begin{cases} 3x + 2y = 4a, \\ ax + y = 3. \end{cases}$$
6. Решите уравнение $9x^2 + 12xy + 4y^2 + 5|3x - y - 6| = 0$.

Вариант 5

1. Система уравнений
$$\begin{cases} ax + by = 11, \\ (b+1)x + ay = 9 \end{cases}$$
 имеет решение (2; 1). Найдите числа a и b .

2. Графическим способом решите систему уравнений
$$\begin{cases} y - |x+1| = 0, \\ y + |x| = 1. \end{cases}$$

3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{3}{x-2} - \frac{2}{y+5} = 1, \\ \frac{2}{x-2} + \frac{3}{y+5} = 5. \end{cases}$$

4. Прямые $y = 3 - x$, $y = 2x$, $y = ax - 2$ пересекаются в одной точке. Найдите коэффициент a .

5. Катер прошел по течению реки от пункта А до пункта В за 6 часов, а от В до А – за 8 часов. За сколько часов проплывет плот от А до В?

6. При всех значениях параметра a определите число решения системы
$$\begin{cases} ax + y = a^3, \\ x + ay = a. \end{cases}$$

Вариант 6

1. Система уравнений
$$\begin{cases} ax + by = 7, \\ (2b+1)x + (3a-2)y = 19 \end{cases}$$
 имеет решение (1; 2). Найдите числа a и b .

2. Графическим способом решите систему уравнений
$$\begin{cases} y - |x-1| = 0, \\ |x| - y = 1. \end{cases}$$

3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{4}{x-1} - \frac{3}{y+2} = 1, \\ \frac{3}{x-1} + \frac{2}{y+2} = 5. \end{cases}$$

4. Прямые $y = 3x - 5$, $y = \frac{1}{2}x$, $y = ax - 3$ пересекаются в одной точке. Найдите коэффициент a .

5. Плот прошел по течению реки от пункта А до пункта В за 4 часа, а от В до А – за 6 часов. За сколько часов проплывет плот от А до В?

6. При всех значениях параметра a определите число решений системы
$$\begin{cases} x + ay = a^4, \\ ax + y = a^2. \end{cases}$$

Урок 123. Анализ контрольной работы

I. Подведение итогов контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Удобно данные заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

Итоги	№ задачи				
	1	2	3	...	6
+	5				
±	1				
-	1				
∅	1				

Обозначения:

+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными погрешностями;

- – число не решивших задачу;

∅ – число не решавших задачу.

Варианты 1, 2 – 8 учащихся.

2. Типичные ошибки при решении задач.

3. Задачи, вызвавшие наибольшие трудности, и их разбор (учителем или школьниками, решившими эту задачу).

II. Разбор задач вариантов

Вариант 1

1. Ответ: (2; -1).

2. Ответ: (2; 4).

3. Ответ: (2; 1).

4. Ответ: (2; 2).

5. Ответ: $y = 3x + 1$.

6. Ответ: вес доски 7 кг, бруса – 12 кг.

Вариант 2

1. Ответ: (-1; 2).

2. Ответ: (2; 2).

3. Ответ: (1; 2).
4. Ответ: (1; -1).
5. Ответ: $y = 2x - 3$.
6. Ответ: вес доски 8 кг, кирпича - 5 кг.

Вариант 3

1. Ответ: (3; -1).
2. Ответ: (-1; 0), (0; -1), (1; 0).
3. Ответ: (-19; -3).
4. Ответ: $y = 3x - 2$.
5. Ответ: при $a \neq 2,5$ единственное решение, при $a = 2,5$ решений нет.
6. Ответ: (9; 6).

Вариант 4

1. Ответ: (3; -2).
2. Ответ: (-1; 1), (1; 1).
3. Ответ: (7; 4).
4. Ответ: $y = -3x - 2$.
5. Ответ: при $a \neq 1,5$ единственное решение, при $a = 1,5$ бесконечно много решений.

6. Ответ: $\left(\frac{4}{3}; -1\right)$.

Вариант 5

1. Подставим данное решение (2; 1) в систему уравнений $\begin{cases} ax + by = 11, \\ (b+1)x - ay = 9 \end{cases}$ и получим систему линейных уравнений для определения величин a и b : $\begin{cases} 2a + b = 11, \\ (b+1) \cdot 2 - a = 9 \end{cases}$ или $\begin{cases} 2a + b = 11, \\ -a + 2b = 7. \end{cases}$

Решим эту систему способом подстановки. Из первого уравнения выразим $b = 11 - 2a$ и подставим во второе уравнение. Получаем линейное уравнение с одной неизвестной: $-a + 2(11 - 2a) = 7$ или $-a + 22 - 4a = 7$, или $-5a = -15$, откуда $a = 3$. Используя формулу $b = 11 - 2a$ найдем $b = 11 - 2 \cdot 3 = 11 - 6 = 5$.

(Ответ: $a = 3, b = 5$.)

2. Систему уравнений $\begin{cases} y - |x+1| = 0, \\ y + |x| = 1 \end{cases}$ запишем в виде $\begin{cases} y = |x+1|, \\ y = 1 - |x|. \end{cases}$

Построим график функций $y = |x+1|$ (ломаная 1) и $y = 1 - |x|$ (ломаная 2). Видно, что графики совпадают по отрезку АВ. Следовательно, данная система имеет бесконечно много решений. Запишем их. Отрезок АВ расположен на прямой $y = x + 1$, при этом абсцисса любой точки

отрезка АВ удовлетворяет условию $-1 \leq x \leq 0$. Поэтому решением данной системы будут пары чисел (x, y) таких, что $-1 \leq x \leq 0$ и $y = x + 1$.

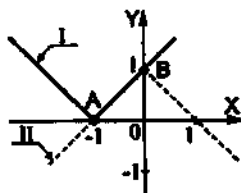


Рис. 2.40

(Ответ: $-1 \leq x \leq 0, y = x + 1$.)

3. Система уравнений
$$\begin{cases} \frac{3}{x-2} - \frac{2}{y+5} = 1, \\ \frac{2}{x-2} + \frac{3}{y+5} = 5 \end{cases}$$
 нелинейная. Однако при ее

решении также можно использовать способ сложения. Для этого перед слагаемыми, зависящими от y , сделаем коэффициенты противоположными. Умножим первое уравнение на число 3, второе уравнение — на

число 2. Получаем систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{3}{x-2} - \frac{6}{y+5} = 3, \\ \frac{4}{x-2} + \frac{6}{y+5} = 10. \end{cases}$$

Сложим уравнения системы и получим уравнение с одной неизвестной: $\frac{9}{x-2} + \frac{4}{x-2} = 3 + 10$ или $\frac{13}{x-2} = 13$.

Тогда знаменатель дроби $x - 2 = 1$, откуда $x = 3$. Подставим это значение, например, в первое уравнение: $\frac{3}{3-2} - \frac{2}{y+5} = 1$ или $3 - \frac{2}{y+5} = 1$,

или $2 = \frac{2}{y+5}$.

Тогда знаменатель дроби $y + 5 = 1$, откуда $y = -4$. Итак, система имеет единственное решение $(3; -4)$.

(Ответ: $(3; -4)$.)

4. Пусть данные прямые пересекаются в точке $A(x_0; y_0)$. Тогда координаты этой точки удовлетворяют уравнениям прямых. Получаем

систему уравнений с параметром a :
$$\begin{cases} y_0 = 3 - x_0, \\ y_0 = 2x_0, \\ y_0 = ax_0 - 2. \end{cases}$$

Первые два уравнения не содержат параметра a . Поэтому сначала решим систему, образованную этими уравнениями
$$\begin{cases} y_0 = 3 - x_0, \\ y_0 = 2x_0. \end{cases}$$

Для ее решения используем еще один способ – способ сравнения. Так как в этих уравнениях равны левые части, то можно приравнять и правые части. Получаем линейное уравнение с одной неизвестной: $3 - x_0 = 2x_0$ или $3 = 3x_0$, откуда $x_0 = 1$.

Из первого уравнения этой системы находим $y_0 = 3 - 1 = 2$.

Итак, первые две прямые пересекаются в точке $A(1; 2)$. Подставим найденные значения x_0 и y_0 в третье уравнение данной системы: $2 = a \cdot 1 - 2$ или $2 = a - 2$, откуда $a = 4$.

(Ответ: $a = 4$.)

5. Пусть расстояние между пунктами A и B равно S км, собственная скорость катера (скорость в стоячей воде) равна x км/ч, скорость течения реки – y км/ч. При движении по течению реки скорость катера увеличивается и равна $x + y$ (км/ч). За 6 часов катер, двигаясь с такой скоростью, проходит расстояние $(x + y) \cdot 6$, равное S . Получаем первое уравнение: $6(x + y) = S$. При движении против течения реки скорость катера уменьшается и равна $x - y$ (км/ч). За 8 часов катер, двигаясь с такой скоростью, проходит расстояние $(x - y) \cdot 8$, равное S . Имеем второе уравнение: $8(x - y) = S$.

Получим систему уравнений:
$$\begin{cases} 6(x + y) = S, \\ 8(x - y) = S \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 6x + 6y = S, \\ 8x - 8y = S. \end{cases}$$

Особенность этой системы в том, что в нее входит три неизвестных и два уравнения. Поэтому найти эти неизвестные нельзя. Плот может двигаться только со скоростью реки y км/ч. Поэтому способом сложения исключим из этой системы переменную x . Для этого умножим первое уравнение на число 4, второе уравнение – на число (-3) . Получаем равносильную систему уравнений:
$$\begin{cases} 24x + 24y = 4S, \\ -24x + 24y = -3S. \end{cases}$$

Сложим уравнения системы: $24y + 24y = 4S - 3S$ или $48y = S$.

Плот пройдет расстояние S со скоростью y за время $\frac{S}{y} = \frac{48y}{y} = 48$ (ч).

(Ответ: 48 ч.)

6. Для системы уравнений
$$\begin{cases} ax + y = a^3, \\ x + ay = a \end{cases}$$
 запишем условие единст-

венности решения: $\frac{a}{1} \neq \frac{1}{a}$ или $a^2 - 1 \neq 0$, или $(a - 1)(a + 1) \neq 0$, откуда

$a \neq 1$ и $a \neq -1$. При $a \neq \pm 1$ система имеет единственное решение. Определим число решений системы при $a = -1$ и $a = 1$. Подставим значение $a = -1$ в данную систему и получим: $\begin{cases} -x + y = (-1)^3, \\ x - y = -1 \end{cases}$, или $\begin{cases} -x + y = -1, \\ x - y = -1. \end{cases}$

Умножим первое уравнение на число (-1) . Получаем равносильную систему уравнений: $\begin{cases} x - y = 1, \\ x - y = -1. \end{cases}$

Очевидно, что такая система решений не имеет, так как одна и та же величина $x - y$ из первого уравнения равна 1, из второго уравнения — равна (-1) .

Подставим значение $a = 1$ в данную систему и получим: $\begin{cases} x + y = 1^3, \\ x + y = 1 \end{cases}$

или $\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 1. \end{cases}$

Такая система уравнений имеет бесконечно много решений, так как уравнения системы одинаковы.

(Ответ: при $a \neq \pm 1$ единственное решение, при $a = -1$ решений нет, при $a = 1$ бесконечно много решений.)

Вариант 6

1. Подставим данное решение $(1; 2)$ в систему уравнений $\begin{cases} ax + by = 7, \\ (2b + 1)x + (3a - 2)y = 19 \end{cases}$ и получим систему линейных уравнений для

определения величин a и b : $\begin{cases} a + 2b = 7, \\ (2b + 1) \cdot 1 - (3a - 2) \cdot 2 = 19 \end{cases}$ или $\begin{cases} a + 2b = 7, \\ 6a + 2b = 22. \end{cases}$

Решим эту систему способом подстановки. Из первого уравнения выразим $a = 7 - 2b$ и подставим во второе уравнение. Получаем линейное уравнение с одной неизвестной: $6(7 - 2b) + 2b = 22$ или $42a - 12b + 2b = 22$, или $-10b = -20$, откуда $b = 2$. Используя формулу $a = 7 - 2b$ найдем $a = 7 - 2 \cdot 2 = 7 - 4 = 3$.

(Ответ: $a = 3, b = 2$.)

2. Систему уравнений $\begin{cases} y - |x - 1| = 0, \\ |x| - y = 1 \end{cases}$ запишем в виде $\begin{cases} y = |x - 1|, \\ y = |x| - 1. \end{cases}$

Построим график функций $y = |x - 1|$ (ломаная 1) и $y = |x| - 1$ (ломаная 2). Видно, что графики совпадают по лучу АВ. Следовательно, данная система имеет бесконечно много решений. Занишем их. Луч АВ расположен на прямой $y = x - 1$, при этом абсцисса любой точки луча

AB удовлетворяет условию $x \geq 1$. Поэтому решением данной системы будут пары чисел (x, y) таких, что $x \geq 1$ и $y = x - 1$.

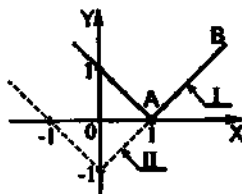


Рис. 2.41

(Ответ: $x \geq 1, y = x - 1$.)

3. Система уравнений
$$\begin{cases} \frac{4}{x-1} - \frac{3}{y+2} = 1, \\ \frac{3}{x-1} + \frac{2}{y+2} = 5 \end{cases}$$
 нелинейная. Однако при ее

решении также можно использовать способ сложения. Для этого перед сложением, зависящими от y , сделаем коэффициенты противоположными. Умножим первое уравнение на число 2, второе уравнение – на

число 3. Получаем систему уравнений:
$$\begin{cases} \frac{8}{x-1} - \frac{6}{y+2} = 2, \\ \frac{9}{x-1} + \frac{6}{y+2} = 15. \end{cases}$$

Сложим уравнения системы и получим уравнение с одной неизвестной: $\frac{8}{x-1} + \frac{9}{x-1} = 2 + 15$ или $\frac{17}{x-1} = 17$.

Тогда знаменатель дроби $x - 1 = 1$, откуда $x = 2$. Подставим это значение, например, в первое уравнение: $\frac{4}{2-1} - \frac{3}{y+2} = 1$ или $4 - \frac{3}{y+2} = 1$,

или $3 = \frac{3}{y+2}$.

Тогда знаменатель дроби $y + 2 = 1$, откуда $y = -1$. Итак, система имеет единственное решение $(2; -1)$.

(Ответ: $(2; -1)$.)

4. Пусть данные прямые пересекаются в точке $A(x_0; y_0)$. Тогда координаты этой точки удовлетворяют уравнениям прямых. Получаем

систему уравнений с параметром a :
$$\begin{cases} y_0 = 3x_0 - 5, \\ y_0 = \frac{1}{2}x_0, \\ y_0 = ax_0 - 3. \end{cases}$$

Первые два уравнения не содержат параметра a . Поэтому сначала решим систему, образованную этими уравнениями

$$\begin{cases} y_0 = 3x_0 - 5, \\ y_0 = \frac{1}{2}x_0. \end{cases}$$

Для ее решения используем еще один способ – способ сравнения. Так как в этих уравнениях равны левые части, то можно приравнять и правые части. Получаем линейное уравнение с одной неизвестной:

$$3x_0 - 5 = \frac{1}{2}x_0 \quad \text{или} \quad 6x_0 - 10 = x_0, \quad \text{откуда} \quad x_0 = 2.$$

Из первого уравнения этой системы находим $y_0 = 3 \cdot 2 - 5 = 6 - 5 = 1$.

Итак, первые две прямые пересекаются в точке $A(2; 1)$. Подставим найденные значения x_0 и y_0 в третье уравнение данной системы: $1 = a \cdot 2 - 3$ или $1 = 2a - 3$, откуда $a = 2$.

(Ответ: $a = 2$.)

5. Пусть расстояние между пунктами A и B равно S км, собственная скорость плота (скорость в стоячей воде) равна x км/ч, скорость течения реки – y км/ч. При движении по течению реки скорость плота увеличивается и равна $x + y$ (км/ч). За 4 часа плот, двигаясь с такой скоростью, проходит расстояние $(x + y) \cdot 4$, равное S . Получаем первое уравнение: $4(x + y) = S$. При движении против течения реки скорость плота уменьшается и равна $x - y$ (км/ч). За 6 часов плот, двигаясь с такой скоростью, проходит расстояние $(x - y) \cdot 6$, равное S . Имеем второе уравнение: $6(x - y) = S$.

Получим систему уравнений:
$$\begin{cases} 4(x + y) = S, \\ 6(x - y) = S \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 4x + 4y = S, \\ 6x - 6y = S. \end{cases}$$

Особенность этой системы в том, что в нее входит три неизвестных и два уравнения. Поэтому найти эти неизвестные нельзя. Плот может двигаться только со скоростью реки y км/ч. Поэтому способом сложения исключим из этой системы переменную x . Для этого умножим первое уравнение на число 3, второе уравнение – на число (-2) . Получаем равносильную систему уравнений:
$$\begin{cases} 12x + 12y = 3S, \\ -12x + 12y = -2S. \end{cases}$$

Сложим уравнения системы: $12y + 12y = 3S - 2S$ или $24y = S$. Плот пройдет расстояние S со скоростью y за время $\frac{S}{y} = \frac{24y}{y} = 24$ (ч).

(Ответ: 24 ч.)

6. Для системы уравнений
$$\begin{cases} x + ay = a^4, \\ ax + y = a^2 \end{cases}$$
 запишем условие единствен-

ности решения: $\frac{1}{a} \neq \frac{a}{1}$ или $1 \neq a^2$, или $0 \neq a^2 - 1$, или $0 \neq (a - 1)(a + 1)$.

откуда $a \neq 1$ и $a \neq -1$. При $a \neq \pm 1$ система имеет единственное решение. Определим число решений системы при $a = -1$ и $a = 1$. Подставим значение $a = -1$ в данную систему и получим: $\begin{cases} x - y = (-1)^4, \\ -x + y = (-1)^2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x - y = 1, \\ -x + y = 1. \end{cases}$

Умножим первое уравнение на число (-1) . Получаем равносильную систему уравнений: $\begin{cases} x - y = 1, \\ x - y = -1. \end{cases}$

Очевидно, что такая система решений не имеет, так как одна и та же величина $x - y$ из первого уравнения равна 1, из второго уравнения — равна (-1) .

Подставим значение $a = 1$ в данную систему и получим: $\begin{cases} x + y = 1^4, \\ x + y = 1^2 \end{cases}$
или $\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 1. \end{cases}$

Такая система уравнений имеет бесконечно много решений, так как уравнения системы одинаковы.

(Ответ: при $a \neq \pm 1$ единственное решение, при $a = -1$ решений нет, при $a = 1$ бесконечно много решений.)

Урок 124. Подготовка к тематическому зачету

Цель: повторить способы решения задач по теме «Системы линейных уравнений»

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Основные понятия

При решении задач напомнить нужные сведения из разделов 15, 16 (уроки 108–123).

III. Задание на уроке

№ 1192 (а, б); 1203; 1209 (б); 1218 (а); 1220; 1125 (а, б); 1129; 1233; 1237.

IV. Задание на дом

№ 1192 (в, г); 1205; 1209 (а); 1221; 1125 (в, г); 1128 (б); 1234; 1238.

V. Подведение итогов урока

Уроки 125–126. Зачет по теме «Системы линейных уравнений»

Цель: сравнение успеваемости учащихся при одинаковой сложности заданий; возможность повышения оценок за выполненные контрольные работы.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Характеристика зачетной работы

Работа составлена в двух равноценных вариантах. По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий. Соответственно у учащихся возрастает возможность выбора задач. Все задания разбиты на три блока А, В и С. Самые простые задачи находятся в части А, более сложные – в части В, еще сложнее – в части С. Каждая задача из А оценивается в 1 балл, из В – в 2 балла, из С – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Поэтому разбору заданий работы отдельного занятия можно и не посвящать (решения задач могут быть вывешены на стенде).

Вариант 1

А

1. Графическим способом решите систему уравнений:
$$\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ x - 2y = 3. \end{cases}$$

2. Способом подстановки решите систему уравнений:
$$\begin{cases} 4x - 3y = 5, \\ x + 2y = 4. \end{cases}$$

3. Способом сложения решите систему уравнений:
$$\begin{cases} -2x + 3y = 11, \\ 3x + 2y = 3. \end{cases}$$

4. Парабола $y = ax^2 + b$ проходит через точки А (2; 5) и В (4; 11).

Найдите числа a и b .

5. Используя графический способ, определите число решений системы уравнений:
$$\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y - x = 1. \end{cases}$$

6. При всех значениях параметра a определите число решений системы уравнений:
$$\begin{cases} 2x + ay = 4, \\ 4x + 3y = 2a. \end{cases}$$

7. На стоянке стоят 18 машин и велосипедов, у которых вместе 60 колес. Сколько машин и сколько велосипедов находится на стоянке?

В

8. Способом подстановки решите систему уравнений:
$$\begin{cases} 2x - y = 0, \\ x + 2 - z = 0, \\ 3x + 2y + z = 10. \end{cases}$$

9. При каких значениях параметра a система уравнений:
$$\begin{cases} 6x + 8y = 2, \\ 3x + 4y = a^2 - 3 \end{cases}$$

не имеет решений?

10. Решите уравнение $2x^2 - 2x + 4y^2 + 4xy + 1 = 0$.

11. Напишите уравнение ломаной, изображенной на рисунке.

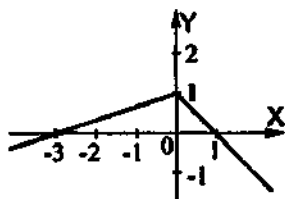


Рис. 2.42

С

12. Пусть $(x_0; y_0; z_0)$ – решение системы уравнений
$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 3, \\ 4x + 2y + 3z = 7, \\ 2x + 3y + z = 6. \end{cases}$$

Найдите сумму $x_0 + y_0 + z_0$.

13. Сколько лет брату и сестре, если 4 года назад брат был старше сестры в 5 раз, а через 5 лет брат будет старше сестры в 2 раза?

14. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; 3)$ и через точку пересечения графиков функций $y = |x|$ и $y = |x - 2|$.

Вариант 2

А

1. Графическим способом решите систему уравнений:
$$\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ x + 2y = 4. \end{cases}$$

2. Способом подстановки решите систему уравнений:
$$\begin{cases} 3x - 4y = 7, \\ x - 2y = 3. \end{cases}$$

3. Способом сложения решите систему уравнений:
$$\begin{cases} 2x - 3y = 7, \\ 3x + 2y = 4. \end{cases}$$

4. Парабола $y = ax^2 + b$ проходит через точки А (1; 3) и В (3; -5). Найдите числа a и b .

5. Используя графический способ, определите число решений системы уравнений $\begin{cases} x^2 + y = 0, \\ x - y = 1. \end{cases}$

6. При всех значениях параметра a определите число решений системы уравнений $\begin{cases} 3x - ay = 3, \\ 4x - 2y = 4a. \end{cases}$

7. На стоянке стоят 26 машин и велосипедов, у которых вместе 88 колес. Сколько машин и сколько велосипедов находится на стоянке?

В

8. Способом подстановки решите систему уравнений: $\begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ 2y + z = 7, \\ 2x + 3y - 2z = 2. \end{cases}$

9. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} 8x - 4y = 8, \\ 2x - y = a^2 - 2 \end{cases}$

не имеет решений?

10. Решите уравнение $x^2 + 10y^2 - 6xy + 4y + 4 = 0$.

11. Напишите уравнение ломаной, изображенной на рисунке.

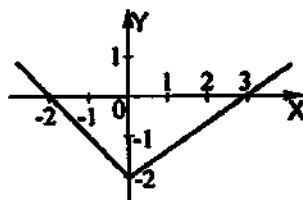


Рис. 2.43

С

12. Пусть $(x_0; y_0; z_0)$ – решение системы уравнений $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8, \\ 2x + 4y + 6z = 7, \\ 4x + y + z = 3. \end{cases}$

Найдите сумму $x_0 + y_0 + z_0$.

13. Сколько лет брату и сестре, если 3 года назад брат был старше сестры в 4 раза, а через 5 лет брат будет старше сестры в 2 раза?

14. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку А (1; 5) и через точку пересечения графиков функций $y = |x + 2|$ и $y = |x|$.

III. Разбор заданий

Вариант 1

1. Ответ: (1; -1).

2. Ответ: (2; 1).

3. Ответ: (-1; 3).

4. Ответ: $a = 0,5$, $b = 3$.

5. Ответ: 2 решения.

6. Ответ: при $a \neq 1,5$ единственное решение; при $a = 1,5$ решений нет.

7. Ответ: 12 машин, 6 велосипедов.

8. Ответ: (1; 2; 3).

9. Ответ: $a \neq \pm 2$.10. Ответ: $\left(1; -\frac{1}{2}\right)$.11. Ответ: $y = \begin{cases} \frac{1}{3}x + 1 & \text{при } x < 0, \\ -x + 1 & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$ 12. В системе уравнений
$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 3, \\ 4x + 2y + 3z = 7, \\ 2x + 3y + z = 6. \end{cases}$$
 в левые части каждая из

переменных входит ровно 8 раз. Поэтому сложим левые и правые части всех трех уравнений. Получаем: $2x + 3y + 4z + 4x + 2y + 3z + 2x + 3y + z + 3 + 7 = 6$ или $8x + 8y + 8z = 16$, или $8(x + y + z) = 16$.

Разделим обе части этого равенства на число 8 и найдем $x + y + z = 2$. Поэтому, если $(x_0; y_0; z_0)$ – решение данной системы, то $x_0; y_0; z_0 = 2$.

(Ответ: 2.)

13. Пусть сейчас брату x лет, сестре – y лет. 4 года назад брату было $(x - 4)$ лет, сестре – $(y - 4)$ лет. По условию брат был старше сестры в 5 раз. Поэтому получаем уравнение: $x - 4 = 5(y - 4)$. Через 5 лет брату будет $(x + 5)$ лет, сестре – $(y + 5)$ лет. Тогда брат будет в 2 раза старше сестры. Имеем второе уравнение: $x + 5 = 2(y + 5)$.

Получили систему уравнений
$$\begin{cases} x - 4 = 5(y - 4), \\ x + 5 = 2(y + 5) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = 5y - 16, \\ x = 2y + 5. \end{cases}$$

Так как в уравнениях одинаковые левые части, то приравняем и правые. Получаем линейное уравнение с одной неизвестной: $5y - 16 = 2y + 5$ или $3y = 21$, откуда $y = 7$. Из первого уравнения находим $x = 5 \cdot 7 - 16 = 35 - 16 = 19$. Итак, сейчас брату 19 лет, сестре – 7 лет.

(Ответ: брату 19 лет, сестре 7 лет.)

14. Сначала найдем точку пересечения графиков функций $y = |x|$ и $y = |x - 2|$. Для этого построим графики таких функций (графики 1 и 2 соответственно). Видно, что графики пересекаются в одной точке В (1; 1).

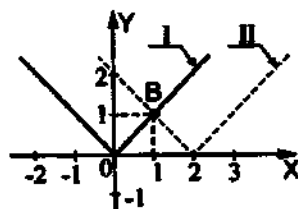


Рис. 2.44

Теперь рассмотрим линейную функцию $y = ax + b$. По условию ее график проходит через точки А (2; 3) и В (1; 1). Поэтому координаты этих точек удовлетворяют уравнению линейной функции. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 3 = 2a + b, \\ 1 = a + b. \end{cases}$$

Решим эту систему способом подстановки. Из второго уравнения выразим $a = 1 - b$ и подставим в первое уравнение:

$3 = 2(1 - b) + b$ или $3 = 2 - 2b + b$, или $1 = -b$, откуда $b = -1$. Используя формулу $a = 1 - b$, найдем $a = 1 - (-1) = 2$. Итак, уравнение данной прямой $y = 2x - 1$.

(Ответ: $y = 2x - 1$.)

Вариант 2

1. Ответ: (2; 1).
2. Ответ: (1; -1).
3. Ответ: (2; 1).
4. Ответ: $a = -1,5$, $b = 4$.
5. Ответ: 2 решения.
6. Ответ: при $a \neq 1,5$ единственное решение; при $a = 1,5$ решений нет.
7. Ответ: 18 машин, 8 велосипедов.
8. Ответ: (1; 2; 3).
9. Ответ: $a \neq \pm 2$.
10. Ответ: (-6; -2).
11. Ответ: $y = \begin{cases} -x - 2 & \text{при } x < 0, \\ \frac{2}{3}x - 2 & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$

12. В системе уравнений
$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8, \\ 2x + 4y + 6z = 7, \\ 4x + y + z = 3. \end{cases}$$
 в левые части каждая из

переменных входит ровно 9 раз. Поэтому сложим левые и правые части всех трех уравнений. Получаем: $3x + 4y + 2z + 2x + 4y + 6z + 4x + y + z = 8 + 7 + 3$ или $9x + 9y + 9z = 18$, или $9(x + y + z) = 18$.

Разделим обе части этого равенства на число 9 и найдем $x + y + z = 2$. Поэтому, если $(x_0; y_0; z_0)$ – решение данной системы, то $x_0; y_0; z_0 = 2$.

(Ответ: 2.)

13. Пусть сейчас брату x лет, сестре – y лет. 3 года назад брату было $(x - 3)$ лет, сестре – $(y - 3)$ лет. По условию брат был старше сестры в 4 раза. Поэтому получаем уравнение: $x - 3 = 4(y - 3)$. Через 5 лет брату будет $(x + 5)$ лет, сестре – $(y + 5)$ лет. Тогда брат будет в 2 раза старше сестры. Имеем второе уравнение: $x + 5 = 2(y + 5)$.

Получили систему уравнений:
$$\begin{cases} x - 3 = 4(y - 3), \\ x + 5 = 2(y + 5) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 4y - 9, \\ x = 2y + 5. \end{cases}$$

Так как в уравнениях одинаковые левые части, то приравняем и правые. Получаем линейное уравнение с одной неизвестной: $4y - 9 = 2y + 5$ или $2y = 14$, откуда $y = 7$. Из первого уравнения находим $x = 4 \cdot 7 - 9 = 28 - 9 = 19$. Итак, сейчас брату 19 лет, сестре – 7 лет.

(Ответ: брату 19 лет, сестре 7 лет.)

14. Сначала найдем точку пересечения графиков функций $y = |x + 2|$ и $y = |x|$. Для этого построим графики таких функций (графики 1 и 2 соответственно). Видно, что графики пересекаются в одной точке В $(-1; 1)$.

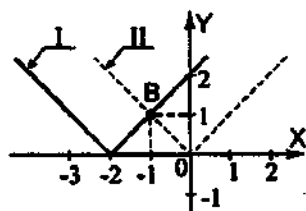


Рис. 2.45

Теперь рассмотрим линейную функцию $y = ax + b$. По условию ее график проходит через точки А $(1; 5)$ и В $(-1; 1)$. Поэтому координаты этих точек удовлетворяют уравнению линейной функции. Получаем

систему уравнений:
$$\begin{cases} 5 = a + b, \\ 1 = -a + b. \end{cases}$$

Решим эту систему способом сложения. Сложим уравнения системы и получим: $5 + 1 = b + b$ или $6 = 2b$, откуда $b = 3$. Подставим это значение в первое уравнение системы $5 = a + 3$, откуда $a = 2$. Итак, уравнение данной прямой $y = 2x + 3$.

(Ответ: $y = 2x + 3$.)

Повторение курса 7 класса

Подготовка к итоговой контрольной работе

Уроки 127–128. Повторение темы «Выражения. Тождества. Уравнения»

Цель: повторить способы решения типичных задач по теме.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Основные понятия

В начале урока полезно напомнить учащимся основные понятия темы (желательно с широким привлечением самих учащихся).

Алгебраическим выражением называется запись, составленная из букв и чисел с помощью арифметических действий и скобок. Переменными называются буквы, входящие в алгебраическое выражение.

Значением алгебраического выражения называется значение числового выражения, которое получается при подстановке в алгебраическое выражение выбранных значений переменных.

Допустимыми значениями переменных в алгебраическом выражении называются такие значения переменных, для которых данное выражение имеет смысл (т. е. выполнимы все действия с этими переменными).

Формулой называется равенство, обе части которого являются алгебраическими выражениями.

Основные свойства операций сложения и умножения чисел.

1. Переместительное свойство: $a+b=b+a$ и $a \cdot b=b \cdot a$. От перестановки слагаемых сумма чисел не меняется. От перестановки сомножителей произведение чисел не меняется.

2. Сочетательное свойство: $(a+b)+c=a+(b+c)$ и $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$.

При сложении и умножении чисел их можно произвольным образом объединить в группы.

3. Распределительное свойство: $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$. При умножении числа на сумму чисел данный множитель умножается на каждое слагаемое и полученные произведения складываются.

Тождественно равными выражениями называются выражения, соответствующие значения которых равны при любых допустимых значениях переменных. **Тождеством** называется равенство, связывающее два тождественно равные выражения. **Тождественным преобразованием** выражения называют замену этого выражения тождественно равным ему.

Уравнением с одной неизвестной называют равенство между двумя алгебраическими выражениями с одной переменной. **Корнем уравнения** называют значение переменной, при котором уравнение обращается

в верное числовое равенство. Решить уравнение означает найти все его корни или доказать, что корней нет. Уравнения, которые имеют одни и те же корни, называют равносильными. Уравнения, которые не имеют корней, также считают равносильными. Решение уравнения состоит в его постепенной замене более простыми равносильными. При решении уравнений используются свойства:

1. Если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую, изменив его знак, то получится равносильное уравнение.

2. Если обе части уравнения умножить или разделить на число (не равное нулю), то получится равносильное уравнение.

Линейным уравнением называется уравнение вида $ax = b$ (где x – переменная, a и b – некоторые числа). При решении линейного уравнения возможны три следующих случая:

1) если $a \neq 0$, то уравнение имеет один корень $x = \frac{b}{a}$;

2) если $a = 0$ и $b = 0$, то уравнение имеет бесконечно много корней;

3) если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение корней не имеет.

Модулем числа (выражения) a называют само это число a , если оно неотрицательное, и противоположное по знаку число $-a$, если число a

отрицательное, т. е. $|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$

III. Задание на уроке

№ 224 (г); 230 (а, б); 238 (в); 239 (г); 241 (в); 224; 247; 250.

IV. Задание на дом

№ 224 (г); 230 (в, г); 238 (г); 239 (в); 241 (г); 245; 246; 251.

V. Подведение итогов урока

Урок 129. Повторение темы «Функции»

Цель: повторить способы решения типичных задач по теме.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Основные понятия

С помощью учащихся полезно напомнить классу основные понятия темы.

Функцией (или функциональной зависимостью) называют такую зависимость переменной y от переменной x , при которой каждому значению x соответствует единственное значение y . Переменную x называют независимой переменной (или аргументом), переменную y – зависимой переменной.

Область определения функции – все значения, которые может принимать независимая переменная x .

Область значений (или область изменения) функции – те значения, которые при этом принимает зависимая переменная y .

Способы задания функции:

- 1) аналитический;
- 2) табличный;
- 3) графический.

Линейной функцией называется функция вида $y = kx + b$ (где k и b – некоторые числа). Графиком линейной функции является прямая линия. Функцию $y = kx$ называют прямой пропорциональной зависимостью. Графиком прямой пропорциональности является прямая, проходящая через начало координат.

III. Задание на уроке

№ 361 (б); 365 (а, в, г); 370; 372 (а); 373; 375; 381; 383 (а, в).

IV. Задание на дом

№ 361 (в); 365 (б, д, е); 371; 372 (б); 374; 378 (б, в, е); 382; 383 (б, г).

V. Подведение итогов урока

Урок 130. Повторение темы «Степень с натуральным показателем»

Цель: повторить решение типичных задач по теме.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Основные понятия

Степенью числа a с натуральным показателем n ($n \geq 2$) называется произведение n одинаковых сомножителей a , т. е. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$. По-

вторяющийся множитель a называют основанием степени, число повторяющихся множителей n – показателем степени. При этом $a^1 = a$ и для $a \neq 0$: $a^0 = 1$.

Свойства степеней с натуральным показателем:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (при умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют тем же, а показатели степеней складывают).

2) $a^m : a^n = a^{m-n}$, где $a \neq 0$, $m \geq n$ (при делении степеней с одинаковыми основаниями оставляют тем же, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя).

3) $(a^n)^m = a^{nm}$ (при возведении степени в степень основание оставляют тем же, а показатели степени умножают).

4) $(ab)^n = a^n b^n$ (при возведении в степень произведения возводят в эту степень каждый множитель и результаты умножают).

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, где $b \neq 0$ (при возведении в степень частного возводят в эту степень числитель и знаменатель и результаты делят).

Одночленом называют произведение чисел, переменных и их степеней, а также сами числа, переменные и их степени. Степенью одночлена считается сумма показателей степеней всех переменных, входящих в одночлен. Если одночлен не содержит переменных (т. е. является числом), то его степень равна нулю. Одночлен, записанный в виде произведения числового множителя (коэффициента одночлена), стоящего на первом месте, и степеней различных переменных, считают стандартным видом одночлена.

График функции $y = -x^2$ — парабола. Этот график проходит через начало координат, расположен в первой и второй координатных четвертях, симметричен относительно оси y .

График функции $y = x^3$ проходит через начало координат, расположен в первой и третьей координатных четвертях, симметричен относительно начала координат.

Абсолютной погрешностью приближенного значения числа называется модуль разности точности и приближенного значений. Если абсолютная погрешность приближенного значения не превосходит числа h , то это значение называют приближенным значением с точностью до h .

Относительной погрешностью приближенного значения называют отношение абсолютной погрешности к модулю приближенного значения.

III. Задание на уроке

№ 560 (а, д); 565 (а, в); 566 (а, в); 568 (б); 569 (а, г); 570 (б, в, е); 572 (а); 580 (а); 591 (б); 599 (г).

IV. Задание на дом

№ 560 (г, е); 565 (б, г); 566 (б, г); 568 (г); 569 (б, в); 570 (г, д); 572 (б); 580 (в); 591 (е); 599 (е).

V. Подведение итогов урока

Уроки 131–132. Повторение темы «Многочлены»

Цель: повторить способы решения типичных задач по теме.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Основные понятия

В начале урока полезно с помощью фронтального опроса учащихся вспомнить основные понятия данной темы.

Многочленом называют алгебраическую сумму одночленов.

Сами одночлены называют членами многочлена. Одночлены можно рассматривать как многочлены, состоящие из одночленов. В многочленах алгебраические суммы подобных членов заменяют одним одночленом (приведение подобных членов). Многочлен имеет стандартный вид, если все входящие в него одночлены записаны в стандартном виде и приведены подобные члены. Степенью многочлена стандартного вида называют наибольшую из степеней входящих в него одночленов.

При сложении и вычитании многочленов используют правило раскрытия скобок. Если перед скобками стоит знак «плюс», то скобки можно опустить, сохраняя знак каждого слагаемого, заключенного в скобки. Если перед скобками стоит знак «минус», то скобки можно опустить, изменяя знак каждого слагаемого, заключенного в скобки.

Чтобы умножить одночлен на многочлен, надо умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить.

Запись данного многочлена в виде произведения других многочленов называют разложением многочлена на множители. Для разложения многочлена на множители используют способы:

- 1) вынесение общего множителя за скобки;
- 2) группировка членов многочлена;
- 3) использование формул сокращенного умножения.

III. Задание на уроке

№ 785 (а); 792 (в); 793 (г); 809 (в); 812 (д); 814; 817; 826 (в); 835 (г); 836 (б); 837 (в).

IV. Задание на дом

№ 788 (а); 792 (г); 793 (в); 809 (г); 812 (е); 815; 821; 826 (г); 835 (в); 836 (з); 837 (г).

V. Подведение итогов урока

Урок 133. Повторение темы «Формулы сокращенного умножения»

Цель: повторить способы решения типичных задач по теме.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Основные понятия

Учитывая большую распространенность этой темы в алгебре, полезно напомнить учащимся формулы сокращенного умножения.

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения).

2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения минус удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения).

3) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ (разность квадратов двух выражений равна произведению разности и суммы этих выражений).

4) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ (сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений и неполного квадрата их разности).

5) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ (разность кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений и неполного квадрата их разности).

6) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (куб суммы двух выражений равен кубу первого выражения плюс утроенное произведение квадрата первого выражения на второе плюс утроенное произведение первого выражения на квадрат второго плюс куб второго выражения).

7) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ (куб разности двух выражений равен кубу первого выражения минус утроенное произведение квадрата первого выражения на второе плюс утроенное произведение первого выражения на квадрат второго минус куб второго выражения).

III. Задание на уроке

№ 1028 (в, к); 1035 (д); 1039 (в); 1041 (в, г); 1044 (б); 1048 (а); 1058 (в); 1060 (а); 1070 (в); 1084 (г).

IV. Задание на дом

№ 1029 (б); 1035 (н); 1039; 1041 (в, г); 1044 (б); 1048 (а); 1058 (в); 1060 (а); 1070 (в); 1084 (г).

V. Подведение итогов урока

Урок 134. Повторение темы «Системы линейных уравнений»

Цель: повторить способы решения типичных задач по теме.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Основные понятия

С помощью учащихся полезно напомнить основные понятия темы.

Равенство, содержащее две переменные, называют **уравнением с двумя переменными** (или **неизвестными**). Если в уравнение неизвестные входят только в первой степени, то такое уравнение называют **линейным уравнением с двумя переменными**. Линейное уравнение имеет вид $ax + by = c$ (где x и y — переменные; a , b и c — некоторые числа). Решением уравнения с двумя неизвестными называют пару значений переменных, при подстановке которых уравнение становится верным числовым равенством.

Уравнения с двумя переменными, имеющие одни и те же решения, называют **равносильными**. Уравнения с двумя переменными, не имеющие решений, также считают **равносильными**.

Уравнения с двумя неизвестными обладают такими же свойствами, как и уравнения с одной переменной:

1) если в уравнении перенести любой член из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, **равносильное** данному;

2) если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же (не равное нулю) число, то получится уравнение, **равносильное** данному.

Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}, \text{ где } x \text{ и } y - \text{неизвестные, } a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 - \text{некоторые числа.}$$

1. Если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то система имеет **единственное** решение.

2. Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система **не имеет** решений.

3. Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система имеет **бесконечно много** решений.

Способы решения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

- 1) **графический способ;**
- 2) **способ подстановки;**
- 3) **способ сложения;**
- 4) **способ сравнения.**

III. Задание на уроке

№ 1206 (б); 1217 (а); 1218 (в); 1223 (б); 1224 (б); 1225 (в); 1227 (г); 1230; 1231 (а); 1235; 1241.

IV. Задание на дом

№ 1206 (в); 1217 (б); 1218 (г); 1223 (а); 1224 (г); 1225 (г); 1232 (б); 1236; 1240.

V. Подведение итогов урока

Урок 135. Итоговая контрольная работа

Цель: итоговая аттестация учащихся по базовым темам курса.

Ход урока

I. Характеристика контрольной работы

Работа составлена в двух вариантах. Все задачи имеют примерно одинаковую сложность и контролируют основные навыки:

- 1) умение проводить преобразования алгебраических выражений с использованием формул сокращенного умножения и вычислять их числовые значения;
- 2) решать линейные и нелинейные уравнения;
- 3) использовать свойства степени с натуральным показателем для вычисления значений числовых выражений;
- 4) умение строить графики линейных функций, определять принадлежность данной точки графику функции;
- 5) решать системы линейных уравнений и применять такие системы для решения текстовых задач.

II. Оценка результатов работы

Оценка «пять» ставится за любые пять правильно решенных задач, оценка «четыре» – за четыре задачи, оценка «три» – за три задачи. Поэтому у учащихся имеется некоторая свобода выбора за счет шестой задачи.

III. Варианты контрольной работы

Вариант 1

1. Упростите выражение $(a + 2b)^2 - (a - b)(b + a)$ и найдите его значение при $a = 1$ и $b = \frac{1}{5}$.
2. Решите уравнение $\frac{5x + 2}{3} + \frac{3x - 1}{5} = 5$.
3. Найдите значение выражения $\frac{(3^4)^2 \cdot 2^{11}}{4 \cdot 36^4}$.
4. Постройте график функции $y = 3x - 6$ и определите, проходит ли он через точки А (41; 117) и В (53; 152).
5. Сумма двух чисел равна 80, а сумма 50 % первого числа и 25 % второго числа равна 26. Найдите эти числа.
5. Решите уравнение $(x - 2)(5x + 3) = (x - 2)(3x - 5)$.

Вариант 2

1. Упростите выражение $(2a + b)^2 - (2a - 3b)(3b + 2a)$ и найдите его значение при $a = 2$ и $b = \frac{1}{5}$.

2. Решите уравнение $\frac{4x+2}{7} + \frac{3x-5}{4} = 3$.

3. Найдите значение выражения $\frac{(5^3)^5 \cdot 3^{16}}{9 \cdot 225^7}$.

4. Постройте график функции $y = 2x - 4$ и определите, проходит ли он через точки А (43; 82) и В (56; 106).

5. Сумма двух чисел равна 90, а сумма 75 % первого числа и 50 % второго числа равна 61. Найдите эти числа.

5. Решите уравнение $(x-3)(6x+5) = (x-3)(2x-3)$.

IV. Разбор заданий вариантов

Вариант 1

1. Используя формулы квадрата суммы и разности квадратов, упростим данное выражение. Получаем: $(a+2b)^2 - (a-b)(b+a) =$

$$= (a+2b)^2 - (a-b)(a+b) = a^2 + 4ab + 4b^2 - (a^2 - b^2) =$$

$$= a^2 + 4ab + 4ab^2 - a^2 + b^2 = 4ab + 4b^2 = b(4a + 5b).$$

Найдем значение этого выражения при $a = 2$ и $b = \frac{1}{5}$.

$$\text{Имеем: } \frac{1}{5} \cdot (4 \cdot 1 + 5 \cdot 1) = \frac{1}{5} \cdot (4 + 1) = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1.$$

(Ответ: 1.)

2. Умножим все члены уравнения $\frac{5x+2}{3} + \frac{3x-1}{5} = 5$ на число 15.

Получаем равносильное уравнение: $\frac{5x+2}{3} \cdot 15 + \frac{3x-1}{5} \cdot 15 = 5 \cdot 15$ или

$(5x+2) \cdot 5 + (3x-1) \cdot 3 = 75$, или $25x + 10 + 9x - 3 = 75$, или $34x = 68$, откуда $x = 2$.

(Ответ: $x = 2$.)

3. Учтем, что $3 \cdot 2 = 6$, и используем свойства степеней. Получаем:

$$\frac{(3^4)^2 \cdot 2^{11}}{4 \cdot 36^4} = \frac{3^{4 \cdot 2} \cdot 2^{4+3}}{4 \cdot (6^2)^4} = \frac{3^8 \cdot 2^8 \cdot 2^3}{4 \cdot 6^{2 \cdot 4}} = \frac{(3 \cdot 2)^8 \cdot 2^3}{4 \cdot 6^8} = \frac{6^8 \cdot 8}{4 \cdot 6^8} = 2.$$

(Ответ: 2.)

4. Построим график функции $y = 3x - 6$. Этим графиком будет прямая линия. Для построения найдем две точки, принадлежащие графику. Например, при $x = 1$ вычислим $y = 3 \cdot 1 - 6 = -3$; при $x = 2$ найдем

$y = 3 \cdot 2 - 6 = 0$. Таким образом, график проходит через точки $C(1; -3)$ и $D(2; 0)$. Отметим эти точки и проведем через них прямую.

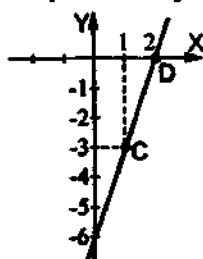


Рис. 2.46

Теперь определим, проходит ли через точки $A(41; 117)$ и $B(53; 152)$. Найдем значение функции при $x = 41$ и получим $y = 3 \cdot 41 - 6 = 123 - 6 = 117$. Так как это значение равно ординате точки A , то график проходит через точку A .

Найдем значение функции при $x = 53$ и получим $y = 3 \cdot 53 - 6 = 159 - 6 = 153$. Так как это значение не равно ординате точки B , то график не проходит через точку B .

(Ответ: проходит через точку A и не проходит через точку B .)

5. Пусть первое число равно x , второе число равно y . По условию их сумма равна 80. Поэтому получаем первое уравнение $x + y = 80$. Один

процент от числа x равен $\frac{x}{100}$, тогда 50 % числа x равны $\frac{x}{100} \cdot 50 = \frac{x}{2}$.

Один процент от числа y равен $\frac{y}{100}$, тогда 25 % числа y равны

$\frac{y}{100} \cdot 25 = \frac{y}{4}$. По условию сумма чисел $\frac{x}{2}$ и $\frac{y}{4}$ равна 26. Поэтому полу-

чаем второе уравнение $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 26$.

Имеем систему двух линейных уравнений
$$\begin{cases} x + y = 80, \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 26. \end{cases}$$

Решим систему способом подстановки. Из первого уравнения вырази-
м $y = 80 - x$ и подставим это выражение во второе уравнение. Полу-

чаем линейное уравнение с одной неизвестной: $\frac{x}{2} + \frac{80 - x}{4} = 26$. Умно-

жим все члены уравнения на число 4 и получим: $\frac{x}{2} \cdot 4 + \frac{80 - x}{4} \cdot 4 = 26 \cdot 4$

или $2x + 80 - x = 104$, или $x + 80 = 104$, откуда $x = 24$. Используя формулу $y = 80 - x$, найдем $y = 80 - 24 = 56$.

(Ответ: первое число 24, второе число 56.)

6. Перенесем все члены уравнения $(x-2)(5x+3) = (x-2)(3x-5)$ в левую часть и разложим ее на множители. Получаем: $(x-2)(5x+3) - (x-2)(3x-5) = 0$ или $(x-2)(5x+3-3x+5) = 0$, или $(x-2)(2x+8) = 0$. Так как произведение двух множителей равно нулю, то один из этих множителей равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $x-2=0$ (его корень $x=2$) и $2x+8=0$ (корень $x=-4$). Итак, данное уравнение имеет два корня: $x=2$ и $x=-4$.

Ответ: $x=2$ и $x=-4$.

Вариант 2

1. Используя формулы квадрата суммы и разности квадратов, упростим данное выражение. Получаем: $(a+2b)^2 - (2a-3b)(3b+2a) =$

$$= (2a+2b)^2 - (2a-3b)(2a+3b) = 4a^2 + 4ab + b^2 - (4a^2 - 9b^2) = \\ = 4ab + 10ab^2 = 2b(2a + 5b).$$

Найдем значение этого выражения при $a=2$ и $b=\frac{1}{5}$.

$$\text{Имеем: } 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(2 \cdot 1 + 5 \cdot \frac{1}{5} \right) = \frac{2}{5} \cdot (4+1) = \frac{2}{5} \cdot 5 = 2.$$

(Ответ: 2.)

2. Умножим все члены уравнения $\frac{4x+2}{7} + \frac{3x-5}{4} = 3$ на число 28.

Получаем равносильное уравнение: $\frac{4x+2}{7} \cdot 28 + \frac{3x-5}{4} \cdot 28 = 3 \cdot 28$ или $(4x+2) \cdot 4 + (3x-5) \cdot 7 = 84$, или $16x + 8 + 21x - 35 = 84$, или $37x = 111$, откуда $x=3$.

(Ответ: $x=3$.)

3. Учтем, что $5 \cdot 3 = 15$, и используем свойства степеней. Получаем:

$$\frac{(5^3)^5 \cdot 2^{11}}{9 \cdot 225^7} = \frac{5^{15} \cdot 3^{16}}{9 \cdot (15^2)^7} = \frac{5^{15} \cdot 3^{16}}{9 \cdot 15^{14}} = \frac{5^{14} \cdot 5 \cdot 3^{14} \cdot 3^2}{9 \cdot 15^{14}} = \frac{(5 \cdot 3)^{14} \cdot 5 \cdot 9}{9 \cdot 15^{14}} = \frac{15^{14} \cdot 5}{15^{14}} = 5.$$

(Ответ: 5.)

4. Построим график функции $y = 2x - 4$. Этим графиком будет прямая линия. Для построения найдем две точки, принадлежащие графику.

Например, при $x=1$ вычислим $y=2 \cdot 1 - 4 = -2$; при $x=2$ найдем $y=2 \cdot 2 - 4 = 0$. Таким образом, график проходит через точки $C(1; -2)$ и $D(2; 0)$. Отметим эти точки и проведем через них прямую.

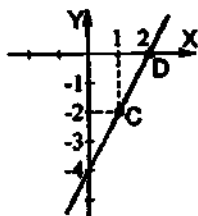


Рис. 2.47

Теперь определим, проходит ли через точки $A(43; 82)$ и $B(56; 106)$. Найдем значение функции при $x=43$ и получим $y=2 \cdot 43 - 4 = 86 - 4 = 82$. Так как это значение равно ординате точки A , то график проходит через точку A .

Найдем значение функции при $x=56$ и получим $y=2 \cdot 56 - 4 = 112 - 4 = 108$. Так как это значение не равно ординате точки B , то график не проходит через точку B .

(Ответ: проходит через точку A и не проходит через точку B .)

5. Пусть первое число равно x , второе число равно y . По условию их сумма равна 90. Поэтому получаем первое уравнение $x + y = 90$. Один

процент от числа x равен $\frac{x}{100}$, тогда 75 % числа x равны $\frac{x}{100} \cdot 75 = \frac{3}{4}x$.

Один процент от числа y равен $\frac{y}{100}$, тогда 50 % числа y равны

$\frac{y}{100} \cdot 50 = \frac{y}{2}$. По условию сумма чисел $\frac{3}{4}x$ и $\frac{y}{2}$ равна 61. Поэтому по-

лучаем второе уравнение $\frac{3}{4}x + \frac{y}{2} = 61$.

Имеем систему двух линейных уравнений

$$\begin{cases} x + y = 90, \\ \frac{3}{4}x + \frac{y}{2} = 61. \end{cases}$$

Решим систему способом подстановки. Из первого уравнения вырази-
м $y = 90 - x$ и подставим это выражение во второе уравнение. Полу-

чаем линейное уравнение с одной неизвестной: $\frac{3}{4}x + \frac{90-x}{2} = 61$. Умно-

жим все члены уравнения на число 4 и получим: $\frac{3}{4}x \cdot 4 + \frac{90-x}{2} \cdot 4 = 61 \cdot 4$

или $3x + (90 - x) \cdot 2 = 244$, или $3x + 180 - 2x = 244$, или $x + 180 = 244$, откуда $x = 64$. Используя формулу $y = 90 - x$, найдем $y = 90 - 64 = 26$.

(Ответ: первое число 64, второе число 26.)

6. Перенесем все члены уравнения $(x-3)(6x+5) = (x-3)(2x-3)$ в левую часть и разложим ее на множители. Получаем:

$(x-3)(6x+5) - (x-3)(2x-3) = 0$ или $(x-3)(6x+5-2x+3) = 0$, или $(x-3)(4x+8) = 0$. Так как произведение двух множителей равно нулю, то один из этих множителей равен нулю. Получаем два линейных уравнения: $x-3=0$ (его корень $x=3$) и $4x+8=0$ (корень $x=-2$). Итак, данное уравнение имеет два корня: $x=3$ и $x=-2$.

(Ответ: $x=3$ и $x=-2$.)

Урок 136. Подведение итогов обучения

Цель: анализ результатов обучения и успехов учащихся.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Основная часть

1. Анализ прохождения материала (темы, которые усвоены хорошо, и темы, которые усвоены недостаточно, с указанием причин: невнимательность, незнание основных формул, арифметические ошибки).

2. Личные успехи и недочеты каждого учащегося, рекомендации по улучшению успеваемости.

3. Краткая характеристика следующего учебного года (изучаемые темы, их применение в прикладных задачах).

Тематическое планирование учебного материала для учебника Ш.А. Алимова, Ю.М. Колягина, Ю.В. Сидорова и др. «Алгебра 7»

I вариант: 3 час. в неделю, всего – 102 час.

II вариант: 4 час. в неделю, всего – 136 час.

I. Алгебраические выражения (I вар. – 10 ч; II вар. – 14 ч)

Числовые выражения (2 ч; 3 ч)

Алгебраические выражения (1 ч; 1 ч)

Алгебраические равенства. Формулы (2 ч; 3 ч)

Свойства арифметических действий (2 ч; 3 ч)

Правила раскрытия скобок (2 ч; 2 ч)

II. Уравнения с одним неизвестным (8 ч; 10 ч)

Уравнения и его корни (1 ч; 1 ч)

Решение уравнений с одним неизвестным, сводящихся к линейным (2 ч; 3 ч)

Решение задач с помощью уравнений (3 ч; 4 ч)

III. Одночлены и многочлены (20 ч; 24 ч)

Степень с натуральным показателем (2 ч; 2 ч)

Свойства степени с натуральным показателем (3 ч; 3 ч)

Одночлен. Стандартный вид одночлена (1 ч; 1 ч)

Умножение одночленов (2 ч; 2 ч)

Многочлены (1 ч; 1 ч)

Приведение подобных членов (1 ч; 2 ч)

Сложение и вычитание многочленов (2 ч; 3 ч)

Умножение многочлена на одночлен (1 ч; 2 ч)

Умножение многочлена на многочлен (3 ч; 3 ч)

Деление одночлена и многочлена на одночлен (2 ч; 2 ч)

IV. Разложение многочлена на множители (17 ч; 19 ч)

Вынесение общего множителя за скобки (3 ч; 3 ч)

Способ группировки (3 ч; 3 ч)

Формула разности квадратов (3 ч; 3 ч)

Квадрат суммы. Квадрат разности (4 ч; 4 ч)

Применение нескольких способов разложения многочлена на множители (3 ч; 5 ч)

V. Алгебраические дроби (21 ч; 22 ч)

Алгебраическая дробь. Сокращение дробей (3 ч; 3 ч)

Приведение дробей к общему знаменателю (3 ч; 3 ч)

Сложение и вычитание алгебраических дробей (5 ч; 4 ч)

Умножение и деление алгебраических дробей (4 ч; 4 ч)

Совместные действия над алгебраическими дробями (5 ч; 5 ч)

VI. Линейная функция и ее график (10 ч; 14 ч)

Прямоугольная система координат на плоскости (1 ч; 2 ч)

Функция (2 ч; 3 ч)

Функция $y = kx$ и ее график (3 ч; 3 ч)

Линейная функция и ее график (3 ч; 3 ч)

VII. Системы двух уравнений с двумя неизвестными (13 ч; 18 ч)

Системы уравнений (1 ч; 1 ч)

Способ подстановки (1 ч; 1 ч)

Способ сложения (3 ч; 4 ч)

Графический способ решения систем уравнений (2 ч; 2 ч)

Решение задач с помощью систем уравнений (3 ч; 5 ч)

Сравнение тематического планирования для учебников Ю.Н. Макарычева и др. и Ш.А. Алимова и др. показывает, что во втором учебнике дополнительно рассмотрена тема «Алгебраические дроби» (глава V). Количество часов по остальным темам для этих двух учебников отличается незначительно. Поэтому при работе с учебником Ш.А. Алимова и др. может быть использовано поурочное планирование для учебника Ю.Н. Макарычева и др.

Приведено поурочное планирование для учебника Ш.А. Алимова и др. по теме «Алгебраические дроби» (глава V) для II варианта (из расчета 4 часа в неделю, всего 136 часов), т. е. для данной темы 22 часа.

Поурочные разработки к учебнику Ш.А. Алимова, Ю.М. Колягина, Ю.В. Сидорова, Н.Е. Федоровой, М.И. Шабунина

V. Алгебраические дроби

§ 24. Алгебраическая дробь. Сокращение дробей

Урок 1. Алгебраическая дробь. Сокращение дробей

Цель: рассмотреть основные понятия, связанные с алгебраическими дробями, вспомнить основное свойство дроби и применить его для сокращения дробей.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

1. Подход к рассмотрению нового материала.

Пример 1

Предложите учащимся сравнить алгебраические выражения:

а) $3x^2y$; б) $2ab^2 + 5bc$; в) $\frac{3a}{b}$;

г) $\frac{2a^3 - 3b}{5a^3 + 2b^2}$; д) $3a^2b + 4\frac{b}{c}$.

Попросите вспомнить числовые выражения и числовые дроби. Какие из приведенных выражений можно назвать алгебраической дробью? Попросите обосновать ответ.

2. Основные понятия.

Алгебраической дробью называют дробь, числитель и знаменатель которые являются алгебраическими выражениями (в частности, такими выражениями могут быть и числа). В примере 1 выражения в) и г) являются алгебраическими дробями. Приведем еще примеры таких дробей: $\frac{b^2}{4}$; $\frac{7}{x}$; $\frac{a}{b}$ и т. д. К алгебраическим дробям приводят многие задачи математики и физики.

Пример 2

а) На m одинаковых станках было сделано n деталей. Тогда на каждом станке было изготовлено $\frac{n}{m}$ деталей.

б) Поезд проехал S км за t часов. Тогда средняя скорость движения поезда $V = \frac{S}{t}$ (км/ч).

в) Площадь прямоугольного цветника длиной l (м) равна S (м²). Тогда его ширина равна $a = \frac{S}{l}$ (м).

Во всех этих примерах ответы являются алгебраическими дробями.

Для вычисления значения алгебраической дроби надо подставить в нее вместо переменных (букв) их значения.

Пример 3

Найдем значение алгебраической дроби $\frac{3a+b}{2a-5b}$ при $a=3$ и $b=1$.

Подставим эти значения переменных a и b в алгебраическую дробь и получим: $\frac{3 \cdot 3 + 1}{2 \cdot 3 - 5 \cdot 1} = \frac{9 + 1}{6 - 5} = \frac{10}{1} = 10$.

Разумеется, подставить можно только такие значения переменных, при которых дробь имеет смысл. Поэтому переменные, входящие в алгебраическую дробь, могут принимать только допустимые значения, т. е. такие значения, для которых знаменатель дроби не равен нулю.

Пример 4

а) Для дроби $\frac{2a-3b^2}{a^2+b^2+1}$ допустимыми являются все значения a и b , так как при любых значениях a и b знаменатель a^2+b^2+1 дроби не равен нулю.

б) Для дроби $\frac{2x-4}{(a-2)(b+1)}$ допустимыми являются все значения a , кроме $a=2$, и все значения b , кроме $b=-1$. При $a=2$ или $b=-1$ знаменатель дроби $(a-2)(b+1)$ равен нулю.

в) Для дроби $\frac{3a^2}{(a-1)(a+5)}$ допустимыми являются все значения a , кроме $a=1$ и $a=-5$. При $a=1$ или $a=-5$ знаменатель дроби $(a-1)(a+5)$ равен нулю.

г) Для дроби $\frac{2a+3b}{a-2b}$ допустимыми являются все значения a и b ,

кроме тех, для которых выполнено равенство $a = 2b$. При $a = 2b$ знаменатель дроби $a - 2b$ равен нулю.

Так как в алгебраической дроби буквами обозначены некоторые числа, то для алгебраических дробей (как и для числовых дробей) справедливы основные свойства дроби и правила действий с дробями.

Основное свойство дроби: $\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb}$, где $b \neq 0$ и $m \neq 0$. Это свойство означает: если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же алгебраическое выражение (не равное нулю), то получится равная ей дробь.

Пример 5

Приведем примеры равных дробей:

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{2}{3} &= \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}; & \text{б) } \frac{x+y}{x} &= \frac{(x+y)x}{x \cdot x} = \frac{(x+y)x}{x^2}; \\ \text{в) } \frac{x}{y} &= \frac{x(x+y)}{y(x+y)} = \frac{x^2+xy}{xy+y^2}. \end{aligned}$$

III. Контрольные вопросы

- Какое выражение называют алгебраической дробью?
- Как найти значение алгебраической дроби?
- Какие значения переменных называют допустимыми?
- Сформулируйте основное свойство дроби.

IV. Задание на уроке

№ 427; 429 (1, 3); 430 (1, 3); 431 (1); 432 (1, 4, 5); 433 (1, 3).

V. Задание на дом

№ 428; 429 (2, 4); 430 (2, 4); 431 (2); 432 (2, 3, 6); 433 (2, 4).

VI. Творческие задания

1) Найти допустимые значения переменных в дроби:

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{3a-4}{(a-1)a}; & \quad \text{б) } \frac{2b+5}{(b+1)(b-2)}; & \quad \text{в) } \frac{5a^2-3}{2a^2+1}; \\ \text{г) } \frac{7b^2-7}{3b^2+2}; & \quad \text{д) } \frac{2a^2-3a}{|a|-1}; & \quad \text{е) } \frac{3b^2-6}{|b|-2}; \\ \text{ж) } \frac{2a-3}{|a+2|}; & \quad \text{з) } \frac{3b+1}{|b-5|}; & \quad \text{и) } \frac{|2a-3|}{2a-3}; \\ \text{к) } \frac{3b+2}{|3b+2|}. \end{aligned}$$

(Ответы: а) $a \neq 0$ и $a \neq 1$; б) $b \neq -1$, $b \neq 2$; в) a — любое; г) b — любое; д) $a \neq \pm 1$; е) $b \neq \pm 2$; ж) $a \neq -2$; з) $b \neq 5$; и) $a \neq \frac{3}{2}$; к) $b \neq -\frac{2}{3}$.)

VII. Подведение итогов урока

Урок 2. Сокращение алгебраических дробей

Цель: обработка навыков сокращения дробей.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

- 1) Как найти значение алгебраической дроби?
- 2) Найти значение дроби $\frac{2a^2 - 3b}{a + 2b}$ при $a = 2$ и $b = 1$.
- 3) Найти допустимые значения переменных в дроби $\frac{2a - 3b + 2}{|2a - 3|(b + 2)}$.
- 4) Из равенства $3a - 2b + 1 = a + 3b + 2$ найти a .

Вариант 2

- 1) Какие значения переменных называют допустимыми?
- 2) Найти значение дроби $\frac{3a^2 - 2b}{2a + b}$ при $a = 2$ и $b = 1$.
- 3) Найти допустимые значения переменных в дроби $\frac{3a + b - 3}{|3a + 1|(b - 3)}$.
- 4) Из равенства $2a - 3b + 4 = 5a + b + 1$ найти b .

III. Обработка и закрепление пройденного материала

Основное свойство дроби используют для сокращения дроби на общий множитель, входящий одновременно в числитель и знаменатель дроби. При этом числитель и знаменатель дроби необходимо разложить на множители.

Пример 1

Сократим дроби: а) $\frac{12a^3b^2}{18a^4b}$; б) $\frac{a^2 - 4b^2}{a^2 - 2ab}$; в) $\frac{2x(x - y)}{3y(y - x)}$.

а) Числитель $12a^3b^2$ и знаменатель $18a^4b$ имеют общий множитель $6a^3b$. Выделим этот общий множитель в числителе и знаменателе, а затем разделим их на этот общий множитель (по основному свойству дроби). Получим: $\frac{12a^3b^2}{18a^4b} = \frac{6a^3b \cdot 2b}{6a^3b \cdot 3a} = \frac{2b}{3a}$.

б) Используя формулу для разности квадратов, разложим числитель дроби на множители: $a^2 - 4b^2 = a^2 - (2b)^2 = (a - 2b)(a + 2b)$. В знаменателе вынесем общий множитель a за скобки и также разложим его на множители: $a^2 - 2ab = a(a - 2b)$.

Видно, что числитель и знаменатель имеют общий множитель $a - 2b$. Поэтому числитель и знаменатель можно разделить на этот множитель. Получим: $\frac{a^2 - 4b^2}{a^2 - 2ab} = \frac{(a - 2b)(a + 2b)}{a(a - 2b)} = \frac{a + 2b}{a}$.

в) В числителе и знаменателе дроби имеются аналогичные множители $x - y$ и $y - x$, которые отличаются только знаками переменных. Поэтому из выражения $x - y$ в числителе вынесем множитель (-1) . Имеем:

$$\frac{2x(x - y)}{3y(y - x)} = \frac{2x \cdot (-1)(y - x)}{3y(y - x)} = \frac{2x \cdot (-1)}{3y} = \frac{-2x}{3y} = -\frac{2x}{3y}.$$

При разложении многочленов, стоящих в числителе и знаменателе дроби, на множители используют три основных способа (попросите учащихся вспомнить эти способы):

- 1) вынесение общего множителя за скобки;
- 2) группировка членов, имеющих общий множитель;
- 3) использование членов, имеющих общий множитель;
- 4) использование формул сокращенного умножения (попросите учащихся выписать эти формулы на доске).

Пример 2

Сократим дроби: а) $\frac{a^2 + ab}{b^2 + ab}$; б) $\frac{ab - ax - bx + x^2}{ab - ax - by + xy}$; в) $\frac{a^2 - 6ab + 9b^2}{a^2 - 9b^2}$.

а) В числителе дроби вынесем за скобки общий множитель a , а в знаменателе — общий множитель b . Тогда получим: $\frac{a^2 + ab}{b^2 + ab} = \frac{a(a + b)}{b(b + a)}$.

Видно, что числитель и знаменатель имеют общий множитель $(a + b)$, на который (по основному свойству дроби) сократим дробь и

получим $\frac{a}{b}$. Таким образом, $\frac{a^2 + ab}{b^2 + ab} = \frac{a}{b}$.

б) Члены числителя и знаменателя общих множителей не имеют. Поэтому в этих многочленах сгруппируем члены, имеющие общий

$$\begin{aligned} \text{множитель. Получаем: } \frac{ab - ax - bx + x^2}{ab - ax - by + xy} &= \frac{(ab - ax) + (-bx + x^2)}{(ab - ax) + (-by + xy)} = \\ &= \frac{a(b-x) - x(b-x)}{a(b-x) - y(b-x)} = \frac{(b-x)(a-x)}{(b-x)(a-y)}. \end{aligned}$$

Сократим (по основному свойству дроби) числитель и знаменатель дроби на общий множитель $b-x$ и получим $\frac{a-x}{a-y}$.

$$\text{Таким образом, } \frac{ab - ax - bx + x^2}{ab - ax - by + xy} = \frac{a-x}{a-y}.$$

в) Легко увидеть, что числитель данной дроби является квадратом разности чисел, знаменатель — разностью квадратов чисел. Используя эти формулы сокращенного умножения, получим: $\frac{a^2 - 6ab + 9b^2}{a^2 - 9b^2} =$

$$= \frac{(a-3b)^2}{a^2 - (3b)^2} = \frac{(a-3b)(a-3b)}{(a-3b)(a+3b)} = \frac{a-3b}{a+3b}.$$

При этом дробь была сокращена на общий множитель $a-3b$. Таким образом, $\frac{a^2 - 6ab + 9b^2}{a^2 - 9b^2} = \frac{a-3b}{a+3b}$.

IV. Контрольные вопросы

- Сформулируйте основное свойство дроби и запишите его.
- Перечислите способы разложения многочленов на множители.
- Запишите формулы сокращенного умножения.

V. Задание на уроке

№ 435 (1, 3); 436 (3, 5); 437 (2); 438 (5); 440 (2); 441 (3).

VI. Задание на дом

№ 435 (2, 4); 436 (4, 6); 437 (4); 439 (2); 440 (4); 442 (2, 5).

VII. Творческие задания

Сократите дробь:

$$\begin{array}{llll} 1) \frac{a^2}{|a|}; & 2) \frac{b^4}{|b|}; & 3) \frac{x^3}{|x|}; & 4) \frac{y^5}{|y|}; \\ 5) \frac{a^2-1}{|a|-1}; & 6) \frac{|b|+1}{b^2-1}; & 7) \frac{a^2-4}{|a-2|}; & 8) \frac{b^2-9}{|b+3|}. \end{array}$$

(Ответы: 1) $|a|$; 2) $|b|^3$; 3) $-x^2$ при $x < 0$ и x^2 при $x > 0$; 4) $-y^4$ при $y < 0$ и y^4 при $y > 0$; 5) $|a|+1$; 6) $\frac{1}{|b|-1}$; 7) $-(a+2)$ при $a < 2$ и $a+2$ при $a > 2$; 8) $-(b-3)$ при $b < -3$ и $b-3$ при $b > -3$.)

VIII. Подведение итогов урока

Урок 3. Сокращение алгебраических дробей

Цель: использование разных приемов разложения на множители числителя и знаменателя для сокращения дробей.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Сократить дробь:

1) $\frac{6a^3b^2}{18ab^4}$;	2) $\frac{14a^2b + 42ab^2}{3a^3b^2 + 9a^2b^3}$;
3) $\frac{4x^2 - 9y^2}{2x - 3y}$;	4) $\frac{x^2 - 9}{ x - 3}$.

Вариант 2

Сократить дробь:

1) $\frac{15x^2y^3}{5x^3y^2}$;	2) $\frac{12a^3b^2 + 36a^2b^3}{2a^2b + 6ab^2}$;
3) $\frac{4x + 3y}{16x^2 - 9y^2}$;	4) $\frac{y^2 - 16}{ y + 4}$.

III. Отработка и закрепление пройденного материала

Заключительное занятие по теме посвящено использованию различных приемов разложения многочленов на множители для сокращения алгебраических дробей. При повторении способа применения формул сокращенного умножения для наиболее подготовленных учащихся полезно использовать примеры с формулами суммы и разности кубов чисел: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ и $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Пример 1

Упростим дроби: а) $\frac{a^3 + 27}{a^2 + 6a + 9}$; б) $\frac{a^2 - 4b^2}{a^3 - 8b^3}$.

а) Разложим на множители числитель дроби, используя формулу суммы кубов чисел, и знаменатель дроби, применяя формулу квадрата суммы чисел. Получаем: $\frac{a^3 + 27}{a^2 + 6a + 9} = \frac{a^3 + 3^3}{(a + 3)^2} = \frac{(a + 3)(a^2 - 3a + 9)}{(a + 3)(a + 3)} = \frac{a^2 - 3a + 9}{a + 3}$.

При этом числитель и знаменатель дроби были сокращены на общий множитель $a+3$.

б) Разложим числитель дроби на множители, используя формулу разности квадратов чисел, и знаменатель дроби, применяя формулу разности кубов

$$\text{чисел. Имеем: } \frac{a^2 - 4b^2}{a^3 - 8b^3} = \frac{a^2 - (2b)^2}{a^3 - (2b)^3} = \frac{(a-2b)(a+2b)}{(a-2b)(a^2 + 2b + 4b^2)} = \frac{a+2b}{a^2 + 2b + 4b^2}.$$

Дробь была сокращена на $a-2b$.

IV. Задание на уроке

№ 444 (1, 3); 445 (3); 446 (1, 2); 448 (1); 449 (1).

V. Задание на дома

№ 444 (2, 4); 445 (4); 446 (3, 4); 448 (2); 449 (2).

VI. Творческие задания

1) Сократить дробь:

$$\text{а) } \frac{8x^3 + 27y}{2x + 3y}; \quad \text{б) } \frac{27a^3 - b^6}{3a - b^2}; \quad \text{в) } \frac{a^2 + 4a + 4}{a^3 + 8b^3};$$

$$\text{г) } \frac{x^3 - 27}{x^2 - 6x + 9}; \quad \text{д) } \frac{4a^2 - b^2}{8a^3 - b^3}; \quad \text{е) } \frac{27a^3 + 8b^3}{9a^2 - 4b^2};$$

$$\text{ж) } \frac{ax - ay - 3x + 3y}{x^3 - y^3}; \quad \text{з) } \frac{a^3 + b^3}{ab - 2a - 2b + b^2}.$$

$$(\text{Ответы: а) } 4x^2 - 6xy + 9y^2; \text{ б) } 9a^2 + 3ab^2 + b^4; \text{ в) } \frac{a+2}{a^2 - 2a + 4};$$

$$\text{г) } \frac{x^2 + 3x + 9}{x - 3}; \text{ д) } \frac{2a + b}{4a^2 + 2ab + b^2}; \text{ е) } \frac{9a^2 - 6ab + 4b^2}{3a - 2b}; \text{ ж) } \frac{a - 3}{x^2 + xy + y^2};$$

$$\text{з) } \frac{a^2 - ab + b^2}{b - 2}.)$$

2) Упростите выражения:

$$\text{а) } \frac{a^2 + 4ab + 4b^2}{a + 2b} + \frac{a^2 - 4ab + 4b^2}{a - 2b}; \quad \text{б) } \frac{x^2 - 4xy + 4y^2}{x - 2y} - \frac{x^2 + 8xy + 6y^2}{x + 4y};$$

$$\text{в) } \frac{ba^3 + b}{2a + b} - \frac{a^3 + 8b^3}{a + 2b}; \quad \text{г) } \frac{27x^3 + 8y^3}{3x + 2y} + \frac{8x^3 + 27y^3}{2x + 3y};$$

$$\text{д) } \frac{8a^3 - b^3}{2a - b} + \frac{8a^3 + b^3}{2a + b}; \quad \text{е) } \frac{27x^3 - y^3}{3x - y} - (3x - y)^2.$$

$$(\text{Ответы: а) } 2a; \text{ б) } -6y; \text{ в) } 3a^2 - 3b^2; \text{ г) } 13x^2 + 12xy + 13y^2; \text{ д) } 8a^2 + 2b^2;$$

$$\text{е) } 9xy.)$$

VII. Подведение итогов урока

§ 25. Приведение дробей к общему знаменателю

Урок 4. Приведение дробей к общему знаменателю

Цель: рассмотреть приведение алгебраических дробей к общему знаменателю в качестве подготовительного этапа перед сложением и вычитанием дробей.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Сократите дробь:

$$1) \frac{15x^2y}{3xy^3};$$

$$2) \frac{(a-3b)^2}{3b-a};$$

$$3) \frac{9a^2 - 12ab + 4b^2}{9a^2 - 4b^2};$$

$$4) \frac{ax - 2ay - bx + 2by}{4y^2 - x^2}.$$

Вариант 2

Сократите дробь:

$$1) \frac{21a^3b}{7ab^2};$$

$$2) \frac{2x-3y}{(3y-2x)^2};$$

$$3) \frac{4a^2 - b^2}{4a^2 + 4ab + b^2};$$

$$4) \frac{b^2 - 4a^2}{2ax - bx - 2ay + by}.$$

III. Изучение нового материала

При сложении и вычитании обыкновенных дробей с разными знаменателями дроби предварительно приводят к общему знаменателю. (Попросите учащихся рассказать, как это делается).

Пример 1

Приведем дроби $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{9}$ и $\frac{11}{30}$ к общему знаменателю.

Общим знаменателем этих дробей является наименьшее общее кратное их знаменателей $\text{НОК}(4; 9; 30) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$. Разделим этот общий знаменатель 180 на знаменатель первой дроби 4 и найдем дополнительный множитель к первой дроби $180 : 4 = 45$. По основному свойству дроби умножим числитель и знаменатель этой дроби на дополнитель-

ный множитель. Получаем $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 45}{4 \cdot 45} = \frac{135}{180}$, т. е. первая дробь приведена к общему знаменателю дробей 180.

Аналогично находим дополнительные множители к первой дроби $180 : 9 = 20$ и ко второй дроби $180 : 30 = 6$. После этого, используя основное свойство дроби, приведем и эти дроби к общему знаменателю:

$$\frac{7}{9} = \frac{7 \cdot 20}{9 \cdot 20} = \frac{140}{180} \text{ и } \frac{11}{30} = \frac{11 \cdot 6}{30 \cdot 6} = \frac{66}{180}.$$

Таким образом, все три дроби приведены к общему знаменателю:

$$\frac{3}{4} = \frac{135}{180}; \frac{7}{9} = \frac{140}{180} \text{ и } \frac{11}{30} = \frac{66}{180}.$$

Подобные же преобразования выполняют и в случае алгебраических дробей при их сложении или вычитании. Такие преобразования также называют приведением дробей к общему знаменателю.

Пример 2

Приведем к общему знаменателю дроби $\frac{3x}{14a^3b^2}$ и $\frac{5y}{21ab^4}$.

Общий знаменатель этих дробей должен нацело делиться на знаменатель каждой дроби $14a^3b^2$ и $21ab^4$. Коэффициент общего знаменателя должен нацело делиться на числа 14 и 21, поэтому он будет равен НОК (14; 21) = 42. Буквенная часть общего знаменателя должна нацело делиться на множители a^3 и a , входящие в знаменатели дробей. Поэтому она будет содержать множитель a^3 . Также буквенная часть общего знаменателя должна нацело делиться на множители b^2 и b^4 , входящие в знаменатели дробей. Поэтому эта часть будет содержать множитель b^4 . Учитывая вышесказанное, получаем общий знаменатель данных дробей $14a^3b^4$, который является наименьшим общим кратным одночленов $14a^3b^2$ и $21ab^4$, стоящих в знаменателях дробей.

Теперь определим дополнительные множители к данным дробям. Для этого разделим общий знаменатель дробей на знаменатель каждой дроби и найдем: $14a^3b^4 : 14a^3b^2 = 3b^2$ (дополнительный множитель к первой дроби) и $42a^3b^4 : 21ab^4 = 2a^2$ (дополнительный множитель ко второй дроби). По основному свойству дроби умножим числитель и знаменатель каждой дроби на дополнительный множитель этой дроби и полу-

$$\text{чим: } \frac{3x}{14a^3b^2} = \frac{3x \cdot 3b^2}{14a^3b^2 \cdot 3b^2} = \frac{9b^2x}{42a^3b^4} \text{ и } \frac{5y}{21ab^4} = \frac{5y \cdot 2a^2}{21ab^4 \cdot 2a^2} = \frac{10a^2y}{42a^3b^4}.$$

Таким образом, данные дроби приведены к общему знаменателю.

Пример 3

Приведем к общему знаменателю дроби $\frac{3x}{2a^2 - 8b^2}$; $\frac{5y}{2a^2 - 8ab + 8b^2}$ и

$$\frac{2z}{3a^2 + 12ab + 12b^2}.$$

Прежде всего разложим знаменатели дробей на множители:

$$2a^2 - 8b^2 = 2(a^2 - 4b^2) = 2(a - 2b)(a + 2b);$$

$$2a^2 - 8ab + 8b^2 = 2(a^2 - 4ab + 4b^2) = 2(a - 2b)^2;$$

$$2a^2 + 12ab + 12b^2 = 3(a^2 + 4ab + 4b^2) = 3(a + 2b)^2.$$

Общий знаменатель дробей должен делиться на знаменатель каждой дроби $2(a - 2b)(a + 2b)$; $2(a - 2b)^2$ и $3(a + 2b)^2$.

Коэффициент общего знаменателя должен нацело делиться на числа 2 и 3, входящие в знаменатели дробей. Поэтому он будет равен НОК (2; 3) = 6.

Буквенная часть знаменателей содержит множители $a - 2b$ и $a + 2b$ в различных степенях. Эта часть должна нацело делиться на $a - 2b$ (это выражение входит в первый знаменатель) и $(a - 2b)^2$ (входит во второй знаменатель). Поэтому буквенная часть общего знаменателя будет содержать множитель $(a - 2b)^2$. Аналогично эта часть должна нацело делиться на $a + 2b$ (входит в первый знаменатель) и $(a + 2b)^2$ (входит в третий знаменатель). Поэтому буквенная часть общего знаменателя будет также содержать множитель $(a + 2b)^2$. Следовательно, получаем общий знаменатель данных дробей $6(a - 2b)^2(a + 2b)^2$, который является наименьшим общим кратным многочленов $2(a - 2b)(a + 2b)$; $2(a - 2b)^2$ и $3(a + 2b)^2$, стоящих в знаменателях дробей.

Определим дополнительные множители к данным дробям. Для этого разделим общий знаменатель дробей на знаменатель каждой дроби и найдем: $6(a - 2b)^2(a + 2b)^2 : 2(a - 2b)(a + 2b) = 3(a - 2b)(a + 2b)$ (дополнительный множитель к первой дроби);

$$6(a - 2b)^2(a + 2b)^2 : 2(a - 2b)^2 = 3(a + 2b)^2$$

$$\text{и } 6(a - 2b)^2(a + 2b)^2 : 3(a + 2b)^2 = 2(a - 2b)^2.$$

По основному свойству дроби умножим числитель и знаменатель каждой дроби на дополнительный множитель этой дроби и получим:

$$\frac{3x}{2a^2 - 8b^2} = \frac{3x}{2(a-2b)(a+2b)} = \frac{3x \cdot 3(a-2b)(a+2b)}{2(a-2b)(a+2b) \cdot 3(a-2b)(a+2b)} = \\ = \frac{9x(a-2b)(a+2b)}{6(a-2b)^2(a+2b)^2};$$

$$\frac{5y}{2a^2 - 8ab + 8b^2} = \frac{5y}{2(a-2b)^2} = \frac{5y \cdot 3(a+2b)^2}{2(a-2b)^2 \cdot 3(a+2b)^2} = \frac{15y(a+2b)^2}{6(a-2b)^2(a+2b)^2};$$

$$\frac{2z}{3a^2 + 12ab + 12b^2} = \frac{2z}{3(a+2b)^2} = \frac{2z \cdot 2(a-2b)^2}{3(a+2b)^2 \cdot 2(a-2b)^2} = \frac{4z(a-2b)^2}{6(a-2b)^2(a+2b)^2}.$$

Таким образом, данные дроби приведены к общему знаменателю.

Из рассмотрения трех приведенных примеров следует, что для приведения дробей к общему знаменателю нужно:

- 1) разложить знаменатели дробей на множители;
- 2) найти общий знаменатель данных дробей;
- 3) определить дополнительный множитель для каждой дроби;
- 4) умножить числитель и знаменатель каждой дроби на ее дополнительный множитель;
- 5) записать каждую дробь с найденным числителем и общим знаменателем.

IV. Контрольные вопросы

- Как найти общий знаменатель обыкновенных дробей?
 - Как определить общий знаменатель алгебраических дробей?
 - Как найти дополнительный множитель для дроби?
 - Как привести дробь к общему знаменателю?
- (Удобно обсудить эти вопросы на конкретных примерах.)

V. Задание на уроке

№ 451 (2, 4); 452 (1, 3); 453 (1, 2).

VI. Задание на дом

№ 451 (1, 3); 452 (2, 4); 453 (3, 4).

VII. Творческие задания

Привести дроби к общему знаменателю:

- 1) $\frac{1}{2}; \frac{1}{2^2}; \frac{1}{2^3}; \frac{1}{2^4};$
- 2) $\frac{2}{3}; \frac{2}{3^2}; \frac{2}{3^3}; \frac{2}{3^4};$
- 3) $\frac{1}{5^n}; \frac{1}{5^{n-1}}; \frac{1}{5^{n+1}};$
- 4) $\frac{3}{4^{n-2}}; \frac{5}{4^n}; \frac{7}{4^{n+2}};$

5) $\frac{4}{3^n}; \frac{2}{3^{2n}}; \frac{1}{3^{3n}};$

6) $\frac{1}{5^{4n}}; \frac{2}{5^{2n}}; \frac{3}{5^n};$

7) $\frac{3}{a^{4n}}; \frac{2}{a^{2n}}; \frac{1}{a^n};$

8) $\frac{b^{3n}}{a^{2n}}; \frac{b^{2n}}{a^{2n}}; \frac{b^n}{a^n};$

9) $\frac{x}{a^{n+2}}; \frac{y}{a^n}; \frac{z}{a^{n-2}};$

10) $\frac{x+1}{a^n}; \frac{y-1}{a^{n+1}}; \frac{z}{a^{n-1}}.$

VIII. Подведение итогов урока

Урок 5. Приведение дробей к общему знаменателю

Цель: решение задач по теме.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Как найти дополнительный множитель к дроби?

2. Привести дроби к общему знаменателю:

а) $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$; б) $\frac{3a}{2b}$ и $\frac{b}{5a}$; в) $\frac{3}{5a^2b}$ и $\frac{7}{10ab^3}$; г) $\frac{5b^2}{2a^{n+2}}$ и $\frac{7b}{6a^{n+1}}.$

Вариант 2

1. Как записать дроби с общим знаменателем?

2. Привести дроби к общему знаменателю:

а) $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{7}$; б) $\frac{2a}{3b}$ и $\frac{5b}{2a}$; в) $\frac{5}{6a^3b^2}$ и $\frac{7}{12a^2b^3}$; г) $\frac{4b^3}{3a^{n+3}}$ и $\frac{5b}{6a^{n+1}}.$

III. Задание на уроке

№ 454 (1, 4); 455 (3); 456 (1, 3); 457 (1, 3, 5); 458 (1, 4).

IV. Задание на дом

№ 454 (2, 3); 455 (4); 456 (2, 4); 457 (2, 4, 6); 458 (2, 3).

V. Подведение итогов урока

Урок 6. Приведение дробей к общему знаменателю

Цель: решение задач по теме, использование приведения дробей к общему знаменателю для решения уравнений.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

Привести дроби к общему знаменателю:

$$1) \frac{2a}{a-3b} \text{ и } \frac{b}{a+3b}; 2) \frac{2}{x^2-4x}; \frac{1}{2x} \text{ и } \frac{3x}{x^2-16};$$

$$3) \frac{3y+1}{y^2+4y}; \frac{2y}{y^2+8y+16} \text{ и } \frac{3y-2}{y^2-16}.$$

Вариант 2

Привести дроби к общему знаменателю:

$$1) \frac{3a}{2a-b} \text{ и } \frac{b}{2a+b}; 2) \frac{5}{x^2+3x}; \frac{2}{3x} \text{ и } \frac{4x}{x^2-9};$$

$$3) \frac{2y-1}{y^2-3y}; \frac{4y}{y^2-6y+9} \text{ и } \frac{2y-3}{y^2-9}.$$

III. Отработка и закрепление пройденного материала

Достаточно часто приведение дробей к общему знаменателю используют при решении уравнений. При этом дроби с одинаковыми знаменателями будут равны, если равны их числители.

Пример 1

$$\text{Решим уравнение } \frac{x(2x+1)}{20} = \frac{3x^2+5}{30}.$$

Общим знаменателем дробей, входящих в уравнение, является число 60. Приведем данные дроби к этому общему знаменателю и получим

$$\frac{3x(2x+1)}{60} = \frac{2(3x^2+5)}{60}. \text{ Такие дроби с одинаковыми знаменателями равны, если равны их числители. Имеет уравнение: } 3x(2x+1) = 2(3x^2+5).$$

Раскроем скобки и получим: $6x^2 + 3x = 6x^2 + 10$ или $3x = 10$. Это линей-

ное уравнение имеет единственный корень $x = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$.

Пример 2

Решим уравнение $\frac{3x-5}{9x^2-30x+25} = \frac{3x+5}{9x^2-25}$.

Учитывая формулы сокращенного умножения, запишем уравнение в виде $\frac{3x-5}{(3x-5)^2} = \frac{3x+5}{(3x-5)(3x+5)}$. Сократив дроби, получаем дроби с оди-

наковыми знаменателями $\frac{1}{3x-5} = \frac{1}{3x-5}$. Очевидно, что полученное выражение является тождеством. Оно справедливо при всех допустимых значениях переменной x , входящей в данное уравнение, т. е. при $(3x-5)^2 \neq 0$ и $(3x-5)(3x+5) \neq 0$, откуда находим $x \neq \frac{5}{3}$ и $x \neq -\frac{5}{3}$.

Поэтому решение данного уравнения – любые значения x , кроме чисел $\frac{5}{3}$ и $-\frac{5}{3}$.

Аналогичным образом решают и более громоздкие уравнения.

Пример 3

Решим уравнение $\frac{x+2}{x^2-2x} = \frac{x}{x^2-4}$.

Разложим знаменатели дробей на множители $\frac{x+2}{x(x-2)} = \frac{x}{(x-2)(x+2)}$.

Приведем дроби к общему знаменателю $x(x-2)(x+2)$ и получим:

$$\frac{(x+2)(x+2)}{x(x-2)(x+2)} = \frac{x \cdot x}{(x-2)(x+2)x}.$$

Так как дроби с одинаковыми знаменателями равны, то равны и числители этих дробей: $(x+2) = x^2$ или $x^2 + 4x + 4 = x^2$, или $4x + 4 = 0$. Корень этого линейного уравнения $x = -1$ является допустимым значением переменной для данного уравнения ($x \neq 0$, $x \neq 2$ и $x \neq -2$). Поэтому $x = -1$ также корень и данного уравнения.

При приведении к общему знаменателю дробей, имеющих более громоздкие знаменатели, используют такой же подход. Кроме того, требуется еще и знание свойств степени с натуральным показателем.

Пример 4

Привести дроби $\frac{a^{2n}}{a^{2n}-b^{2n}}$ и $\frac{b^n}{a^n+b^n}$ к общему знаменателю.

Учтем свойства степени и разложим знаменатель первой дроби на множители, используя формулу разности квадратов:

$$a^{2n} - b^{2n} = (a^n)^2 - (b^n)^2 = (a^n + b^n)(a^n - b^n).$$

Тогда дополнительный множитель ко второй дроби равен $a^n - b^n$.

Поэтому получаем:
$$\frac{b^n}{a^n + b^n} = \frac{b^n(a^n - b^n)}{(a^n + b^n)(a^n - b^n)} = \frac{b^n(a^n - b^n)}{a^{2n} - b^{2n}}.$$

Пример 5

Привести к общему знаменателю дроби: $\frac{1}{a^{2m} + 2a^m b^m + b^{2m}}; \frac{2}{a^m + b^m}$

и $\frac{3}{a^{2m} - b^{2m}}.$

Используя формулы сокращенного умножения разложим знаменатели первой и третьей дробей на множители:

$$a^{2m} + 2a^m b^m + b^{2m} = (a^m)^2 + 2 \cdot a^m \cdot b^m + (b^m)^2 = (a^m + b^m)^2 \text{ и}$$

$$a^{2m} - b^{2m} = (a^m)^2 - (b^m)^2 = (a^m - b^m)(a^m + b^m).$$

Найдем общий знаменатель дробей $(a^m + b^m)(a^m - b^m)$ и дополнительные множители: к первой дроби — $(a^m + b^m)$, ко второй дроби — $(a^m + b^m)(a^m - b^m)$ и к третьей дроби — $(a^m + b^m)$. Теперь приводим дроби

к общему знаменателю:
$$\frac{1}{a^{2m} + 2a^m b^m + b^{2m}} = \frac{1}{(a^m + b^m)^2} =$$

$$= \frac{1 \cdot (a^m - b^m)}{(a^m + b^m)^2 (a^m - b^m)} = \frac{a^m - b^m}{(a^m + b^m)^2 (a^m - b^m)}; \quad \frac{2}{a^m + b^m} = \frac{2(a^m + b^m)(a^m - b^m)}{(a^m + b^m)^2 (a^m - b^m)}$$

и
$$\frac{3}{a^{2m} - b^{2m}} = \frac{3}{(a^m - b^m)(a^m + b^m)} = \frac{3(a^m + b^m)}{(a^m + b^m)(a^m - b^m)}.$$

IV. Задание на уроке

№ 459 (1, 3); 460 (2, 4); 461 (1).

V. Задание на дом

№ 459 (2, 4); 460 (1, 3); 461 (2).

VI. Подведение итогов урока

§ 26. Сложение и вычитание алгебраических дробей

Урок 7. Сложение и вычитание алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями

Цель: рассмотреть сложение и вычитание алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1) Привести дроби к общему знаменателю:

$$а) \frac{a^m + b^n}{a^{2m} - 2a^m b^n + b^{2n}} \text{ и } \frac{1}{a^m - b^n};$$

$$б) \frac{a^{2m}}{a^{2m} + 2a^m b^n + b^{2n}} \text{ и } \frac{b^n}{a^{2m} - b^{2n}}.$$

2) Решите уравнение $\frac{2}{4x^2 - 9} = \frac{1}{2x^2 + 3x}$.

Вариант 2

1) Привести дроби к общему знаменателю:

$$а) \frac{a^m - b^n}{a^{2m} + 2a^m b^n + b^{2n}} \text{ и } \frac{1}{a^m + b^n};$$

$$б) \frac{a^m}{a^{2m} - 2a^m b^n + b^{2n}} \text{ и } \frac{b^{2n}}{a^{2m} - b^{2n}}.$$

2) Решите уравнение $\frac{3}{9x^2 - 4} = \frac{1}{3x^2 - 2x}$.

III. Изучение нового материала

Правила сложения и вычитания обыкновенных дробей легко распространяются и на алгебраические дроби. При сложении (вычитании) алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями получается дробь с тем же знаменателем и числителем, который равен сумме (разности)

числителей данных дробей, т. е. $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}$ и $\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}$.

Пример 1

Сложим дроби $\frac{2a-b}{2a+3b}$, $\frac{3a+2b}{2a+3b}$ и $\frac{4a-3}{2a+3b}$.

В соответствии с изложенным правилом получаем:

$$\frac{2a-b}{2a+3b} + \frac{3a+2b}{2a+3b} + \frac{4a-3}{2a+3b} = \frac{2a-b+3a+2b+4a-3}{2a+3b} = \frac{9a-2b}{2a+3b}.$$

Заметим, что в числителе получившейся дроби были приведены подобные члены.

Пример 2

Вычтем дроби $\frac{2a+b}{3a-b}$ и $\frac{3a-2b}{3a-b}$.

Пользуясь приведенным правилом, имеем:

$$\frac{2a+b}{3a-b} - \frac{3a-2b}{3a-b} = \frac{2a+b-(3a-2b)}{3a-b} = \frac{2a+b-3a+2b}{3a-b} = \frac{3b-a}{3a-b}.$$

Пример 3

Выполним действия $\frac{4a^2+2ab}{4a^2-b^2} + \frac{ab+4b^2}{4a^2-b^2} - \frac{3b^2-ab}{4a^2-b^2}$. Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{4a^2+2ab}{4a^2-b^2} + \frac{ab+4b^2}{4a^2-b^2} - \frac{3b^2-ab}{4a^2-b^2} &= \frac{4a^2+2ab+ab+4b^2-(3b^2-ab)}{4a^2-b^2} = \\ &= \frac{4a^2+2ab+ab+4b^2-3b^2+ab}{4a^2-b^2} = \frac{4a^2+4ab+b^2}{4a^2-b^2} = \frac{(2a+b)^2}{(2a-b)(2a+b)} = \frac{2a+b}{2a-b}. \end{aligned}$$

IV. Контрольные вопросы

- Отличаются ли правила сложения и вычитания обыкновенных и алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями?
- Как сложить (вычесть) алгебраические дроби с одинаковыми знаменателями?

V. Задание на уроке

№ 462 (1, 2).

VI. Задание на дом

№ 462 (3, 4).

VII. Творческие задания

1) Выполните действия:

а) $\frac{4a+2}{2a+3} - \frac{3a-1}{2a+3} + \frac{a}{2a+3}$;

б) $\frac{2x}{3x-4} + \frac{6x-5}{3x-4} - \frac{2x+3}{3x-4}$;

в) $\frac{4a-3b}{a+b} + \frac{2a}{a+b} - \frac{3a-b}{a+b}$;

г) $\frac{3x-2y}{x+4y} - \frac{2x-3y}{x+4y} + \frac{x-2y}{x+4y}$;

$$\begin{aligned} \text{д)} \frac{a^2+3a}{a^2-16} + \frac{6a}{a^2-16} - \frac{a-16}{a^2-16}; \quad \text{е)} \frac{3x}{x^2-9} - \frac{4-x^2}{x^2-9} + \frac{3x+13}{x^2-9}; \\ \text{ж)} \frac{a^2+2ab}{2a+3b} - \frac{a^2-ab}{2a+3b} + \frac{2a^2}{2a+3b}; \quad \text{з)} \frac{2x^2+3xy}{x+y} - \frac{xy-y^2}{x+y} + \frac{2y^2-x^2}{x+y}. \end{aligned}$$

2) Решите уравнение:

$$\begin{aligned} \text{а)} \frac{x^2}{x+3} - \frac{9}{x+3} = 5; \quad \text{б)} \frac{4}{x-2} - \frac{x^2}{x-2} = 1; \\ \text{в)} \frac{2x^2+3x}{x+3} - \frac{x^2-3x-9}{x+3} = -3; \quad \text{г)} \frac{4x}{x-4} + \frac{6x+2}{x-4} - \frac{18x-x^2-14}{x-4} = -2; \\ \text{д)} \frac{2x-3}{x+2} - \frac{3x-4}{x+2} = 2; \quad \text{е)} \frac{3x+5}{4-x} - \frac{x+3}{4-x} = 1; \\ \text{ж)} \frac{3x^2+9}{x^2-9} - \frac{2x^2+9}{x^2-9} - \frac{2x^2+6x}{x^2-9} = 3; \quad \text{з)} \frac{2x^2+11x}{x^2-4} - \frac{x^2+7x-4}{x^2-4} = 2; \\ \text{и)} \frac{x^2}{x-3} - \frac{9}{x-3} = x+3; \quad \text{к)} \frac{x^2}{x+2} - \frac{4}{x+2} = x-2; \\ \text{л)} \frac{x^2}{x+4} - \frac{16}{x+4} = x+2; \quad \text{м)} \frac{x^2}{x-5} - \frac{25}{x-5} = x-4. \end{aligned}$$

VIII. Подведение итогов урока

Урок 8. Сложение и вычитание алгебраических дробей с разными знаменателями

Цель: рассмотреть сложение и вычитание алгебраических дробей с разными знаменателями.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

- 1) Как сложить алгебраические дроби с одинаковыми знаменателями?
- 2) Выполните действия:

$$\begin{aligned} \text{а)} \frac{3a^2}{a-3} - \frac{2a^2+9}{a-3}; \quad \text{б)} \frac{2x^2+3x}{x^2-4} - \frac{x^2-x}{x^2-4} + \frac{4}{x^2-4}. \end{aligned}$$

3) Решите уравнение $\frac{3x-5}{x+2} - \frac{x-1}{x+2} = 1$.

Вариант 2

1) Как вычесть алгебраические дроби с одинаковыми знаменателями?

2) Выполните действия:

а) $\frac{4a^2}{a+2} - \frac{3a^2+4}{a+2}$;

б) $\frac{3x^2+5x}{x^2-9} - \frac{2x^2-x}{x^2-9} + \frac{9}{x^2-9}$.

3) Решите уравнение $\frac{4x+3}{x-1} - \frac{x+1}{x-1} = 1$.

III. Изучение нового материала

При сложении и вычитании алгебраических дробей с разными знаменателями используется то же правило, что и для обыкновенных дробей. Сначала данные дроби приводят к общему знаменателю, затем используют правило сложения (вычитания) дробей с одинаковыми знаменателями.

Пример 1

Сложить дроби: $\frac{y}{x^2}$, $\frac{x+y}{2xy}$ и $\frac{x}{3y^2}$.

Общим знаменателем данных дробей является произведение $6x^2y^2$.
Дополнительный множитель к первой дроби $6y^2$, ко второй дроби $3xy$ и к третьей дроби $2x^2$. В соответствии с изложенным правилом получаем:

$$\begin{aligned} \text{см: } \frac{y}{x^2} + \frac{x+y}{2xy} + \frac{x}{3y^2} &= \frac{y \cdot 6y^2}{6x^2y^2} + \frac{(x+y) \cdot 3xy}{6x^2y^2} + \frac{x \cdot 2x^2}{6x^2y^2} = \\ &= \frac{6y^3}{6x^2y^2} + \frac{3x^2y + 3xy^2}{6x^2y^2} + \frac{2x^3}{6x^2y^2} = \frac{6y^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 2x^3}{6x^2y^2}. \end{aligned}$$

Пример 2

Вычесть дроби $\frac{3}{a^2-4}$ и $\frac{2}{a^2+2a}$.

Разложим знаменатели дробей на множители $a^2-4=(a-2)(a+2)$ и $a^2+2a=a(a+2)$. Общим знаменателем дробей является произведение $a(a-2)(a+2)$. Пользуясь приведенным правилом, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{3}{a^2-4} - \frac{2}{a^2+2a} &= \\ &= \frac{3a}{a(a-2)(a+2)} - \frac{2(a-2)}{a(a-2)(a+2)} = \frac{3a}{a(a^2-4)} - \frac{2a-4}{a(a^2-4)} = \\ &= \frac{3a-2a+4}{a(a^2-4)} = \frac{a+4}{a(a^2-4)}. \end{aligned}$$

Заметим, что в числителе полученной дроби были приведены подобные члены.

Из приведенных примеров видно, что для сложения или вычитания алгебраических дробей с разными знаменателями нужно:

- 1) разложить знаменатели данных дробей на множители;
- 2) найти общий знаменатель дробей и дополнительные множители к каждой дроби;
- 3) привести дроби к общему знаменателю;
- 4) сложить или вычесть эти дроби с одинаковыми знаменателями;
- 5) упростить полученную дробь (привести подобные члены в числителе, сократить дробь и т. д.), если возможно.

IV. Контрольные вопросы

- Можно ли при сложении или вычитании алгебраических дробей с разными знаменателями использовать правило для обыкновенных дробей?
- Как сложить или вычесть алгебраические дроби с разными знаменателями?

V. Задание на уроке

№ 463 (1, 3); 464 (1); 465 (2, 4); 466 (3); 467 (1, 3).

VI. Задание на дом

№ 463 (2, 4); 464 (3); 465 (1, 3); 466 (2); 467 (2, 4).

VII. Подведение итогов урока

Урок 9. Сложение и вычитание алгебраических дробей с разными знаменателями

Цель: решение задач по теме.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

- 1) Как сложить алгебраические дроби с разными знаменателями?
- 2) Выполните действия:

$$а) 3 - \frac{2}{a} + \frac{5}{a^2b};$$

$$б) \frac{2a}{a-1} - \frac{a^2+2}{a^2-2a+1} + \frac{a+1}{a^2-a};$$

$$в) \frac{a^2}{a^3+1} - \frac{a-1}{a^2-a+1}.$$

Вариант 2

- 1) Как сложить алгебраические дроби с разными знаменателями?
 2) Выполните действия:

$$а) 5 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2 y};$$

$$б) \frac{3x}{x+1} - \frac{x^2+5}{x^2+2x+1} + \frac{x-1}{x^2+x};$$

$$в) \frac{x^2}{x^3-1} - \frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

III. Изучение нового материала

При сложении и вычитании алгебраических дробей часто приходится изменять знаки знаменателя какой-либо дроби. Для этого используют основное свойство дроби: умножают ее числитель и знаменатель на число (-1) .

Пример 1

$$\text{Вычтем дроби } \frac{2n+3}{n-1} \text{ и } \frac{n+1}{1-n}.$$

Видно, что знаменатели данных дробей противоположны по знаку (отличаются знаком). Поэтому, чтобы знаменатели дробей стали одинаковыми, изменим знаки в знаменателях второй дроби. Для этого умножим числитель и знаменатель второй дроби на число (-1) . В результате меняется знак

$$\text{перед этой дробью: } \frac{2n+3}{n-1} - \frac{n+1}{1-n} = \frac{2n+3}{n-1} + \frac{n+1}{1-n} = \frac{2n+3+n+1}{n-1} = \frac{3n+4}{n-1}.$$

Разумеется, при сложении и вычитании дробей с разными знаменателями и для приведения их к общему знаменателю приходится использовать известные вам способы разложения многочленов на множители.

Пример 2

$$\text{Выполним действия } \frac{2}{4x^2-9y^2} + \frac{5}{2x^2+3xy} + \frac{4}{3y^2-2xy}.$$

Прежде всего разложим знаменатели дробей на множители. Для первой дроби используем формулу разности квадратов, для второй и третьей дробей – вынесение общего множителя за скобки. Тогда получим:

$$\frac{2}{(2x-3y)(2x+3y)} + \frac{5}{x(2x+3y)} + \frac{4}{y(3y-2x)}.$$

Видно, что для нахождения общего знаменателя удобно изменять знак перед последней дробью.

$$\text{Имеем: } \frac{2}{(2x-3y)(2x+3y)} + \frac{5}{x(2x+3y)} - \frac{4}{y(3y-2x)}.$$

Теперь находим общий знаменатель дробей $xy(2x-3y)(2x+3y)$. Тогда дополнительный множитель к первой дроби xy , ко второй дроби $y(2x-3y)$, к третьей дроби $x(2x+3y)$. В результате получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{2xy}{xy(2x-3y)(2x+3y)} + \frac{5y(2x-3y)}{xy(2x-3y)(2x+3y)} - \frac{4x(2x+3y)}{xy(2x-3y)(2x+3y)} = \\ & = \frac{2xy + 5y(2x-3y) - 4x(2x+3y)}{xy(2x-3y)(2x+3y)} = \frac{2xy + 10xy - 15y^2 - 8x^2 - 12xy}{xy(2x-3y)(2x+3y)} = \\ & = \frac{-8x^2 - 15y^2}{xy(4x^2 - 9y^2)} = -\frac{8x^2 + 15y^2}{xy(4x^2 - 9y^2)}. \end{aligned}$$

IV. Задание на уроке

№ 468 (1); 469 (2); 470 (1, 2); 471 (3); 472 (3); 473 (1, 5).

V. Задание на дом

№ 468 (3); 469 (4); 470 (3, 4); 471 (4); 472 (2, 4); 473 (2, 4, 6).

VI. Подведение итогов урока

Урок 10. Сложение и вычитание алгебраических дробей с разными знаменателями

Цель: решение задач повышенной сложности.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

Выполните действия:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{1-x}; & \text{б) } & \frac{x}{(x-3)^2} + \frac{1}{3-x}; \\ \text{в) } & \frac{2a+3}{2a^2+4a} - \frac{a+1}{a^2+4a+4}. \end{aligned}$$

Вариант 2

Выполните действия:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{3}{a^2-4} + \frac{2}{2-a}; & \text{б) } & \frac{a}{(a-4)^2} + \frac{2}{4-a}; \end{aligned}$$

$$в) \frac{2x+1}{2x^2+6x} - \frac{x+2}{x^2+6x+9}.$$

III. Изучение нового материала

Сложение и вычитание алгебраических дробей часто используется для упрощения и вычисления значений алгебраических выражений, решения линейных уравнений и т. д.

Пример 1

Упростите выражение $\frac{a}{b^2+ab} + \frac{1}{a+b}$ и вычислите его значение при $a = 0,83$ и $b = 0,2$. Сначала упростим данное выражение:

$\frac{a}{b^2+ab} + \frac{1}{a+b} = \frac{a}{b(a+b)} + \frac{b}{b(a+b)} = \frac{a+b}{b(a+b)} = \frac{1}{b}$. Видно, что полученное выражение не зависит от переменной a . При $b = 0,2$ найдем значение этого выражения $\frac{1}{0,2} = 5$.

Пример 2

Докажите, что значение выражения $\frac{1}{(a-3)(a-b)} + \frac{1}{(3-b)(3-a)} + \frac{1}{(b-a)(b-3)}$ постоянно.

Упростим данное выражение. Так как в знаменателях дробей входят выражения $a-3$, $a-b$ и $b-3$ или противоположные им по знаку выражения, то (используя основное свойство дроби) запишем данное выражение в виде: $\frac{1}{(a-3)(a-b)} + \frac{1}{(b-3)(a-3)} - \frac{1}{(a-b)(b-3)}$.

Теперь найдем общий знаменатель дробей $(a-3)(b-3)(a-b)$. Дополнительный множитель к первой дроби $(b-3)$, ко второй дроби $(a-b)$, к третьей дроби $(a-3)$. Приведем дроби к общему знаменателю и выполним действия: $\frac{b-3}{(a-3)(b-3)(a-b)} + \frac{a-b}{(a-3)(b-3)(a-b)} - \frac{a-3}{(a-3)(b-3)(a-b)} = \frac{b-3+a-b-(a-3)}{(a-3)(b-3)(a-b)} = \frac{a-3-(a-3)}{(a-3)(b-3)(a-b)} = \frac{0}{(a-3)(b-3)(a-b)} = 0$.

Видно, что при всех допустимых значениях переменных a и b (т. е. $a \neq 3, b \neq 3$ и $a \neq b$) данное выражение равно числу 0, т. е. его значение постоянно.

Пример 3

Решите уравнение $\frac{3x-2}{4} + \frac{x+1}{2} - \frac{2x+3}{3} = 2$.

В левой части уравнения выполним действия с дробями. Общий знаменатель дробей равен 12. Тогда получаем: $\frac{3(3x-2)}{12} + \frac{6(x+1)}{12} - \frac{4(2x+3)}{12} = 2$
или $\frac{9x-6+6x+6-8x-12}{12} = 2$, или $\frac{7x-12}{12} = 2$.

Умножим обе части уравнения на число 12. Имеем: $7x-12=2 \cdot 12$
или $7x-12=24$, или $7x=24+12$, или $7x=36$, откуда $x=\frac{36}{7}=5\frac{1}{7}$.

Пример 4

Решите уравнение $\frac{2x-1}{x^2-4} - \frac{2x+3}{x^2-2x} = \frac{2}{x^3-4x}$.

Разложим знаменатели дробей на множители и получим:

$$\frac{2x-1}{(x-2)(x+2)} - \frac{2x+3}{x(x-2)} = \frac{2}{x(x-2)(x+2)}.$$

Вычтем дроби в левой части уравнения, приведя их к общему знаменателю: $x(x-2)(x+2): \frac{x(2x-1)}{x(x-2)(x+2)} - \frac{(x+2)(2x+3)}{x(x-2)(x+2)} = \frac{2}{x(x-2)(x+2)}$
или $\frac{x(2x-1)-(x+2)(2x+3)}{x(x-2)(x+2)} = \frac{2}{x(x-2)(x+2)}$, или $\frac{-8x-6}{x(x-2)(x+2)} = \frac{2}{x(x-2)(x+2)}$.

Сравнивая левую и правую части уравнения, видим, что такие дроби с одинаковыми знаменателями равны, если равны их числители, т. е. $-8x-6=2$. Решая это линейное уравнение, найдем его корень $x=-1$. Это число $x=-1$ является допустимым значением ($x \neq 0, x \neq \pm 2$) для данного уравнения. Поэтому $x=-1$ — единственный корень данного уравнения.

IV. Задание на уроке

№ 474 (1, 2); 475 (3); 476 (1, 2); 477 (1); 478 (1); 473 (2).

V. Задание на дом

№ 474 (3, 4); 475 (4); 476 (3); 477 (4); 478 (2); 479 (1).

VI. Подведение итогов урока

§ 27. Умножение и деление алгебраических дробей

Урок 11. Умножение и деление дробей

Цель: изучение правил умножения и деления алгебраических дробей.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Решите уравнение:

$$1) \frac{x}{2} + \frac{x}{5} - \frac{x}{7} = 1;$$

$$2) \frac{2x+3}{3} - \frac{x-1}{2} + \frac{3x-2}{4} = 2;$$

$$3) \frac{3x+5}{x^2-1} - \frac{3x-1}{x^2-x} = \frac{2-x}{x^3-x}.$$

Вариант 2

Решите уравнение:

$$1) \frac{x}{3} - \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 2;$$

$$2) \frac{3x-1}{2} + \frac{2x-3}{3} - \frac{1-4x}{3} = 1;$$

$$3) \frac{3x+3}{x^2+2x} - \frac{2x-1}{x^2-4} = \frac{3-x}{x^3-4x}.$$

III. Изучение нового материала

Для начала вспомним правила умножения и деления обыкновенных дробей, рассмотрев пример.

Пример 1

а) Умножим дроби $\frac{23}{25}$ и $\frac{10}{69}$. Для этого по правилу умножения

обыкновенных дробей умножим числители и знаменатели дробей. В полученной дроби (по основному свойству дробей) сократим ее числитель и знаменатель (если это возможно). Получаем:

$$\frac{23}{25} \cdot \frac{10}{69} = \frac{23 \cdot 10}{25 \cdot 69} = \frac{23 \cdot 5 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 3} = \frac{2}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}.$$

б) Разделим дроби $\frac{9}{22}$ и $\frac{6}{11}$. Для этого по правилу деления обыкновенных дробей операцию деления дробей заменим умножением первой дроби на дроби, обратной второй (делителю).

Получаем: $\frac{9}{22} : \frac{6}{11} = \frac{9}{22} \cdot \frac{11}{6} = \frac{9 \cdot 11}{22 \cdot 6} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 11}{2 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{3}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$.

Правило умножения и деления обыкновенных дробей распространяется и на алгебраические дроби. При умножении алгебраических дробей получается дробь, числитель которой равен произведению числителей, а знаменатель — произведению знаменателей исходных дробей.

т. е. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Если возможно, то полученную дробь надо сократить.

Пример 2

Найдем произведение дробей $\frac{3z}{4xy}$, $\frac{2x^2}{5zy}$ и $\frac{10y}{9xz^3}$.

Используя правило умножения дробей, получаем:

$$\frac{3z}{4xy} \cdot \frac{2x^2}{5zy} \cdot \frac{10y}{9xz^3} = \frac{3z \cdot 2x^2 \cdot 10y}{4xy \cdot 5zy \cdot 9xz^3} = \frac{1}{3yz^3}.$$

Пример 3

Умножим дроби $\frac{a-2b}{a^2+3ab}$ и $\frac{ab+3b^2}{a^2-4b^2}$.

$$\begin{aligned} \text{С помощью правила умножения дробей имеем: } & \frac{a-2b}{a^2+3ab} \cdot \frac{ab+3b^2}{a^2-4b^2} = \\ & = \frac{(a-2b)(ab+3b^2)}{(a^2+3ab)(a^2-4b^2)} = \frac{(a-2b) \cdot b(a+3b)}{a(a+3b)(a-2b)(a+2b)} = \frac{b}{a(a+2b)}. \end{aligned}$$

При делении алгебраических дробей операция деления заменяется умножением, а делитель — обратной дробью, т. е. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

Примеры 4

Разделим дроби $\frac{4x^2-9y^2}{5xy+2y^2}$ и $\frac{2x-3y}{10x^2+4xy}$.

$$\begin{aligned} \text{Используя правило деления дробей, найдем: } & \frac{4x^2-9y^2}{5xy+2y^2} : \frac{2x-3y}{10x^2+4xy} = \\ & = \frac{4x^2-9y^2}{5xy+2y^2} \cdot \frac{10x^2+4xy}{2x-3y} = \frac{(4x^2-9y^2)(10x^2+4xy)}{(5xy+2y^2)(2x-3y)} = \\ & = \frac{(2x-3y)(2x+3y) \cdot 2x(5x+2y)}{y(5x+2y)(2x-3y)} = \frac{2x(2x+3y)}{y}. \end{aligned}$$

При возведении алгебраической дроби в степень в эту степень возводятся ее числитель и знаменатель и результаты делятся, т. е. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Пример 5

а) $\left(\frac{2a}{b^2}\right)^2 = \frac{2^2 \cdot a^2}{(b^2)^2} = \frac{4a^2}{b^4};$

б) $\left(\frac{x-y}{5z}\right)^3 = \frac{(x-y)^3}{5^3 z^3} = \frac{(x-y)^3}{125z^3}.$

IV. Контрольные вопросы

- Правило умножения алгебраических дробей?
- Как разделить алгебраические дроби?
- Как возвести алгебраическую дробь в степень?

V. Задание на уроке

№ 480 (1, 3); 481 (2, 4); 482 (3, 5); 483 (1, 2); 484 (1, 2).

VI. Задание на дом

№ 480 (2, 4); 481 (1, 3); 482 (4, 6); 483 (3, 4); 484 (3, 4).

VII. Подведение итогов урока**Урок 12. Умножение и деление дробей****Цель:** отработать навыки умножения и деления дробей.**Ход урока****I. Сообщение темы и цели урока****II. Повторение и закрепление пройденного материала**

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

- 1) Как умножить алгебраические дроби?
- 2) Выполните действия:

а) $\frac{a^2 b^3}{c^2} \cdot \frac{c}{ab};$

б) $\frac{x^3}{y^2 z} : \frac{x^2}{y};$

в) $\left(\frac{5a}{3b}\right)^3 \cdot \frac{9b}{5a^2}.$

Вариант 2

- 1) Как разделить алгебраические дроби?
- 2) Выполните действия:

а) $\frac{a^3 y}{z^3} \cdot \frac{z^2}{xy^2};$

б) $\frac{a^2}{b^3 c^2} : \frac{a}{bc^2};$

в) $\left(\frac{2x}{3y}\right)^3 \cdot \frac{3y^2}{4x}.$

III. Отработка и закрепление пройденного материала

Правила умножения и деления алгебраических дробей были изучены на предыдущем уроке. Полученные навыки могут быть использованы при вычислении значений выражений.

Пример 1

Найти значения выражения $\frac{a^2 - 4b^2}{3a - 6b} : \frac{2a^2 - 4ab}{b}$, если $a = \frac{1}{3}$ и $b = 8$.

Проще всего и целесообразнее предварительно упростить данное выражение, а затем найти его значение при заданных величинах a и b . Используем правило деления дробей, разложим их числители и знаменатели на множители и сократим дробь. Получаем: $\frac{a^2 - 4b^2}{3a - 6b} : \frac{2a^2 - 4ab}{b} =$
 $= \frac{(a - 2b)(a + 2b)}{3(a - 2b)} \cdot \frac{b}{2a(a + 2b)} = \frac{a + 2b}{3} \cdot \frac{b}{2a(a + 2b)} = \frac{(a + 2b) \cdot b}{3 \cdot 2a(a + 2b)} = \frac{b}{6a}$.

Теперь подставим данные значения $a = \frac{1}{3}$ и $b = 8$ и найдем:

$$\frac{b}{6a} = \frac{8}{6 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{8}{2} = 4.$$

В ряде случаев даже невозможно найти значение выражения, предварительно не упростив его.

Пример 2

Найти значение выражения $\frac{9x^2 - 4y^2}{2xy} \cdot \frac{2x^2y}{9x^2 - 12xy + 4y^2} : \frac{3x + 2y}{3x - 2y}$, если $x = 7$.

Используя правила умножения и деления дробей, упростим данное выражение: $\frac{9x^2 - 4y^2}{2xy} \cdot \frac{2x^2y}{9x^2 - 12xy + 4y^2} : \frac{3x + 2y}{3x - 2y} =$
 $= \frac{(3x - 2y)(3x + 2y)}{2xy} \cdot \frac{2x^2y}{(3x - 2y)^2} \cdot \frac{3x - 2y}{3x + 2y} =$
 $= \frac{(3x - 2y)(3x + 2y) \cdot 2x^2y(3x - 2y)}{2xy(3x - 2y)^2(3x + 2y)} = x.$

Видно, что полученное выражение не зависит от переменной y . Значение данного выражения при $x = 7$ равно 7.

Заметим, что первоначально было невозможно вычислить значение данного выражения, т. к. не была задана величина переменной y . Данное выражение, очевидно, имеет смысл и равно 7 только при условиях: $y \neq 0$, $3x - 2y \neq 0$ (т. е. $y \neq \frac{3x}{2}$ или $y \neq \frac{21}{2}$) и $3x + 2y \neq 0$ (т. е. $y \neq -\frac{3x}{2}$ или $y \neq -\frac{21}{2}$).

IV. Задание на уроке

№ 485 (2); 486 (1, 3); 487 (1, 2); 488 (1, 4); 489 (1); 490 (1, 2).

V. Задание на дом

№ 485 (3, 4); 486 (2, 4, 6); 487 (3, 4); 488 (2, 3); 489 (2); 490 (3, 4), 350.

VI. Подведение итогов урока**Урок 13. Умножение и деление дробей***Цель:* решение задач по теме и закрепление навыков.**Ход урока****I. Сообщение темы и цели урока****II. Повторение и закрепление пройденного материала**

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

- 1) Упростите выражение $\frac{2x+2y}{3xy} \cdot \frac{4x^2y}{x^2+xy}$.
- 2) Найдите значение выражения $\frac{a^2-b^2}{ab+b^2} : \frac{a-b}{2ab^2}$ при $a = \frac{1}{2}$ и $b = 5$.

Вариант 2

- 1) Упростите выражение $\frac{3a-3b}{4ab} : \frac{a^2-b^2}{2a^2+2ab}$.
- 2) Найдите значение выражения $\frac{xy-y^2}{x^2-y^2} \cdot \frac{x+y}{2xy^2}$ при $x = \frac{1}{2}$ и $y = 1$.

III. Отработка и закрепление пройденного материала

Правила умножения и деления алгебраических дробей очень часто используются при решении уравнений.

Пример 1

Решим уравнение $\frac{4x^2-9}{6x-9} : \frac{2x^2+3x}{5} = 10$.

Сначала упростим левую часть уравнения. Получаем:

$$\frac{(2x-3)(2x+3)}{3(2x-3)} : \frac{x(2x+3)}{5} = 10 \text{ или } \frac{2x+3}{3} \cdot \frac{5}{x(2x+3)} = 10, \text{ или } \frac{5}{3x} = 10.$$

Умножим обе части уравнения на x : $\frac{5}{3} = 10x$.

Из этого линейного уравнения найдем $x = \frac{5}{3} : 10 = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$.

Полученное значение x является допустимым для данного уравнения $x \neq 0$, $x \neq \pm \frac{3}{2}$. Поэтому данное уравнение имеет единственный корень $x = \frac{1}{6}$.

Пример 2

Решим уравнение $\frac{a^2 - b^2}{x+1} = ab + b^2$ ($a \neq b, a \neq -b, b \neq 0$) относительно x .

Разделим обе части данного уравнения на $a+b$ (т. к. $a \neq -b$) и получим $\frac{a-b}{x+1} = b$. Умножим обе части уравнения на $x+1$ (очевидно, что $x+1 \neq 0$), тогда $a-b = b(x+1)$. Разделим обе части уравнения на b (т. к. $b \neq 0$) и найдем $x+1 = \frac{a-b}{b}$. Так как $a+b$, то $x+1 \neq 0$. Из этого линейного уравнения находим $x = \frac{a-b}{b} - 1 = \frac{a-2b}{b}$. Итак, уравнение имеет единственный корень $x = \frac{a-2b}{b}$.

IV. Задание на уроке

№ 491 (1, 3); 492 (1, 4); 493 (2, 3); 494 (1).

V. Задание на дом

№ 491 (2, 4); 492 (2, 3); 493 (1, 4); 494 (2).

VI. Подведение итогов урока

§ 28. Совместные действия над алгебраическими дробями

Урок 14. Совместные действия с дробями

Цель: выполнение различных действий с дробями.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1) Решите уравнение $\frac{4x^2-1}{2x+3} : \frac{2x+1}{2x+3} = 1$.

2) Упростите выражение $\frac{a^2-4ab+4b^2}{2a+3b} \cdot \frac{2a^2+3ab}{a-2b}$.

Вариант 2

1) Решите уравнение $\frac{9x^2-4}{5x+1} \cdot \frac{5x+1}{3x-2} = 8$.

2) Упростите выражение $\frac{4a^2+4ab+b^2}{5a+2b} \cdot \frac{5ab+2b}{2a+b}$.

III. Изучение нового материала

При решении многих задач с алгебраическими дробями выполняют различные действия с дробями. При этом надо помнить, что в первую очередь выполняются действия в скобках, во вторую очередь — умножение и деление, в третью очередь — сложение.

Пример 1

Упростим выражение $\left(\frac{a+b}{b} - \frac{2b}{b-a}\right) \cdot \frac{b-a}{a^2+b^2}$.

Сначала выполним первое действие — вычитание дробей в скобках.

$$\begin{aligned} \text{Получаем: } \frac{a+b}{b} - \frac{2b}{b-a} &= \frac{(a+b)(b-a) - 2b \cdot b}{b(b-a)} = \frac{b^2 - a^2 - 2b^2}{b(b-a)} = \\ &= \frac{-a^2 - b^2}{b(b-a)} = -\frac{a^2 + b^2}{b(b-a)}. \end{aligned}$$

Теперь выполним второе действие — умножение дробей. Имеем:

$$-\frac{a^2 + b^2}{b(b-a)} \cdot \frac{b-a}{a^2 + b^2} = -\frac{(a^2 + b^2)(b-a)}{b(b-a)(a^2 + b^2)} = -\frac{1}{b}.$$

Решение этой задачи можно записать и иначе (не разбивая ее на действия). Получаем: $\left(\frac{a+b}{b} - \frac{2b}{b-a}\right) \cdot \frac{b-a}{a^2+b^2} = \frac{(a+b)(b-a) - 2b \cdot b}{b(b-a)} \cdot \frac{b-a}{a^2+b^2} =$

$$= \frac{b^2 - a^2 - 2b^2}{b(b-a)} \cdot \frac{b-a}{a^2+b^2} = \frac{(-a^2 - b^2)(b-a)}{b(b-a)(a^2+b^2)} = \frac{-(a^2 + b^2)(b-a)}{b(b-a)(a^2+b^2)} = -\frac{1}{b}.$$

Часто действия с дробями возникают при решении текстовых задач.

Пример 2

Катер с собственной скоростью 25 км/ч движется по реке со скоростью течения 5 км/ч между двумя городами туда и обратно. Найдите среднюю скорость движения катера.

По определению средняя скорость движения $V = S : t$, где S – пройденное расстояние; t – время, за которое это расстояние было пройдено.

Пусть расстояние между городами составляет a км. Предположим, что сначала катер плывет по течению реки. Тогда его скорость равна

$$V_1 = 25 + 5 = 30 \text{ км/ч и на путь будет затрачено время } t_1 = \frac{a}{V_1} = \frac{a}{30} \text{ (часов).}$$

Если катер плывет против течения реки, то его скорость равна

$$V_2 = 25 - 5 = 20 \text{ км/ч. Тогда на путь будет затрачено время } t_2 = \frac{a}{V_2} = \frac{a}{20} \text{ (часов).}$$

Итак, в целом на путь длиной $S = 2a$ (км) было потрачено время

$$t = t_1 + t_2 = \frac{a}{30} + \frac{a}{20} = \frac{2a + 3a}{60} = \frac{5a}{60} = \frac{a}{12} \text{ (часов). Поэтому средняя скорость движения катера } V = S : t = 2a : \frac{a}{12} = \frac{2a \cdot 12}{a} = 24 \text{ (км/ч).}$$

$$\text{рость движения катера } V = S : t = 2a : \frac{a}{12} = \frac{2a \cdot 12}{a} = 24 \text{ (км/ч).}$$

Отметим, что в тех задачах, в которых необходимо выполнить достаточно много действий с дробями, удобно проводить решение по действиям.

Пример 3

$$\quad \quad \quad (1) \quad (3) \quad \quad (2)$$

$$\text{Упростим выражение } \left(5 - \frac{5x+2y}{2x} \right) \cdot \left(\frac{1}{5x+2y} + \frac{1}{5x-2y} \right).$$

Сначала укажем порядок действий и надпишем их последовательность: действие 1 – вычитание выражений в первой скобке; действие 2 – сложение дробей во второй скобке; действие 3 – умножение результатов первого и второго действий. Теперь выполним эти действия.

$$(1) \quad 5 - \frac{5x+2y}{2x} = \frac{5 \cdot 2x - (5x+2y)}{2x} = \frac{10x - 5x - 2y}{2x} = \frac{5x - 2y}{2x}.$$

$$(2) \quad \frac{1}{5x+2y} + \frac{1}{5x-2y} = \frac{5x-2y+5x+2y}{(5x+2y)(5x-2y)} = \frac{10x}{(5x+2y)(5x-2y)}.$$

$$(3) \quad \frac{5x-2y}{2x} \cdot \frac{10x}{(5x+2y)(5x-2y)} = \frac{(5x-2y) \cdot 10x}{2x(5x+2y)(5x-2y)} = \frac{5x}{5x+2y}.$$

IV. Задание на уроке

№ 495 (2, 5); 497 (1); 498 (1, 3); 499 (1, 2).

V. Задание на дом

№ 495 (1, 6); 497 (2); 498 (2, 4); 499 (3, 4).

VI. Подведение итогов урока**Урок 15. Совместные действия
над алгебраическими дробями***Цель:* отработка навыков решения задач по теме.**Ход урока****I. Сообщение темы и цели урока****II. Повторение и закрепление пройденного материала**

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Выполните действия:

$$\begin{array}{ll}
 1) \left(\frac{x}{3} - \frac{x}{4} \right) \cdot \frac{3}{x^2}; & 2) \left(\frac{a}{a-2} + 1 \right) : \left(a + \frac{a^2}{2-a} \right); \\
 3) \left(\frac{2a}{a+b} + \frac{b-a}{a} \right) : \frac{b^2 + a^2}{b+a}.
 \end{array}$$

Вариант 2

Выполните действия:

$$\begin{array}{ll}
 1) \left(\frac{a}{3} - \frac{a}{5} \right) \cdot \frac{5}{a^2}; & 2) \left(\frac{x}{x-1} + 1 \right) : \left(x + \frac{x^2}{1-x} \right); \\
 3) \left(\frac{x+y}{x} - \frac{2x}{x-y} \right) \cdot \frac{x-y}{x^2 + y^2}.
 \end{array}$$

III. Отработка и закрепление пройденного материала

При решении задач этого урока полезно еще раз вспомнить формулы сокращенного умножения.

Пример 1

$$\begin{array}{ccc}
 \langle 1 \rangle & \langle 3 \rangle & \langle 2 \rangle
 \end{array}$$

Упростим выражение: $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2 \right) \cdot \left(\frac{x+y}{x} - \frac{y}{x+y} - \frac{x^2+y^2}{x^2+xy} \right).$

Сделаем задачу по действиям, используя формулы сокращенного умножения.

$$(1) \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2 = \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{xy} = \frac{(x+y)^2}{xy}.$$

$$(2) \frac{x+y}{x} - \frac{y}{x+y} - \frac{x^2+y^2}{x^2+xy} = \frac{x+y}{x} - \frac{y}{x+y} - \frac{x^2+y^2}{x(x+y)} =$$

$$= \frac{(x+y)^2 - xy - (x^2+y^2)}{x(x+y)} = \frac{x^2 + 2xy + y^2 - xy - x^2 - y^2}{x(x+y)} = \frac{xy}{x(x+y)} = \frac{y}{x+y}.$$

$$(3) \frac{(x+y)^2}{xy} \cdot \frac{y}{x+y} = \frac{(x+y)^2 y}{xy(x+y)} = \frac{x+y}{x}.$$

Пример 2

(1) (3) (2)

Вычислим значение выражения: $\left(\frac{x^2}{y^3} + \frac{1}{x}\right) : \left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right)$ при $\frac{x}{y} = 9$.

Сначала упростим данное выражение, сделав задачу по действиям.

$$(1) \frac{x^2}{y^3} + \frac{1}{x} = \frac{x^3 + y^3}{xy^3} = \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{xy^3}.$$

$$(2) \frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{x^2 - xy + y^2}{xy^2}.$$

$$(3) \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{xy^3} : \frac{x^2 - xy + y^2}{xy^2} = \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)xy^2}{xy^3(x^2 - xy + y^2)} = \frac{x+y}{y} =$$

$$= \frac{x}{y} + \frac{y}{y} = \frac{x}{y} + 1.$$

Теперь подставим известную величину $\frac{x}{y} = 9$ и найдем значение данного выражения $\frac{x}{y} + 1 = 9 + 1 = 10$. Теперь разберемся с допустимыми значениями переменных. Данное выражение имеет смысл при $x \neq 0$, $y \neq 0$ и $x^2 - xy + y^2 \neq 0$. Очевидно, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$ (если бы $x = 0$ или $y = 0$, то отношение $\frac{x}{y} \neq 0$). Покажем, что $x^2 - xy + y^2 \neq 0$.

Выделим в этом выражении полный квадрат разности:

$$x^2 - xy + y^2 = \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{y}{2} + \left(\frac{y}{2}\right)^2\right) + \frac{3y^2}{4} = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2.$$

Очевидно, что $\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 \geq 0$ и $\frac{3}{4}y^2 > 0$ (так как $y \neq 0$). Поэтому сумма $\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0$ или $x^2 - xy + y^2 > 0$ при всех значениях x и y .

Итак, значение данного выражения равно 10 при $\frac{x}{y} = 9$.

IV. Задание на уроке

№ 500 (1, 2); 501 (2, 3); 502 (1).

V. Задание на дом

№ 500 (3, 4); 501 (1, 4); 502 (2).

VI. Подведение итогов урока

Урок 16. Совместные действия над алгебраическими дробями

Цель: решение более сложных задач по теме.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Упростите выражение:

- 1) $\left(\frac{x-y}{y-x}\right) \cdot \frac{x+y}{2xy}$; 2) $\frac{a^2-b^2+a+b}{x^2-y^2+x-y} \cdot \frac{5x-5y}{4a+4b}$;
- 3) $\left(\frac{a^2}{a+x} - \frac{a}{a^2+x^2+2ax}\right) : \left(\frac{a}{a+x} - \frac{a^2}{a^2-x^2}\right)$.

Вариант 2

Упростите выражение:

- 1) $\left(\frac{x-y}{y-x}\right) \cdot \frac{3xy}{x-y}$; 2) $\frac{a^2-b^2+a-b}{x^2-y^2+x+y} \cdot \frac{3a-3b}{4x+4y}$;
- 3) $\left(\frac{2a}{2a+b} - \frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right) : \left(\frac{2a}{2a^2-b^2} + \frac{1}{b-2a}\right)$.

III. Отработка и закрепление пройденного материала

Навыки решения задач на совместные действия над алгебраическими дробями используются и при решении более сложных задач.

Пример 1

Найти такие значения a и b , чтобы равенство $\frac{2x-1}{x^2-x-2} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1}$ выполнялось при всех допустимых значениях x .

Прежде всего отметим, что $(x-2)(x+1) = x^2 + x - 2x - 2 = x^2 - x - 2$. Поэтому для приведенных дробей допустимыми являются те значения x , при которых их знаменатели не равны нулю, т. е. $x-2 \neq 0$ (т. е. $x \neq 2$) и $x+1 \neq 0$ (т. е. $x \neq -1$). Таким образом, допустимы все x , кроме $x = -1$ и $x = 2$.

В правой части данного равенства приведем дроби к общему знаменателю и сложим их:

$$\frac{2x-1}{x^2-x-2} = \frac{a(x+1)+b(x-2)}{(x-2)(x+1)} \quad \text{или} \quad \frac{2x-1}{x^2-x-2} = \frac{ax+a+bx-2b}{(x-2)(x+1)},$$

$$\text{или} \quad \frac{2x-1}{x^2-x-2} = \frac{(a+b)x+(a-2b)}{(x-2)(x+1)}.$$

Две дроби с одинаковыми знаменателями равны, если их числители, т. е. $2x-1 = (a+b)x + (a-2b)$.

Так как такое равенство должно выполняться при всех допустимых значениях x , то необходимо, чтобы в левой и правой части коэффициенты при x и свободные члены совпадали. Получаем систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:
$$\begin{cases} a+b=2, \\ a-2b=-1. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $a=1$, $b=1$. Итак, при $a=1$, $b=1$ условия задачи выполняются.

При рассмотрении этого примера дробь с более сложным знаменателем x^2-x-2 была представлена в виде суммы дробей с более простыми знаменателями $x-2$ и $x+1$. Этот подход полезно использовать при нахождении суммы числовых дробей.

Пример 2

$$\text{Найти сумму дробей: } S = \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{2}{95 \cdot 97} + \frac{2}{97 \cdot 99}.$$

Легко заметить, что знаменатель каждой дроби представляет собой произведение двух соседних нечетных чисел, т. е. каждая дробь имеет

вид: $\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$ (где $n = 1, 2, 3 \dots$).

Представим дробь $\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$ в виде суммы дробей с более простыми знаменателями $2n-1$ и $2n+1$, т. е.

$$\frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$$

(аналогично предыдущему примеру), где a и b — числители этих дробей.

В правой части такого равенства приведем дроби к общему знаменателю и сложим их:

$$\frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{a(2n+1) + b(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$\text{или } \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2an + a + 2bn - b}{(2n-1)(2n+1)},$$

$$\text{или } \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2n(a+b) + (a-b)}{(2n-1)(2n+1)}.$$

В последнем равенстве две дроби с одинаковыми знаменателями равны, если при всех значениях n равны их числители, т. е.

$$2 = 2n(a+b) + (a-b).$$

Так как левая часть равенства не зависит от n , то в правой части коэффициент при n равен нулю. Также должны совпадать свободные члены. Получаем систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a+b=0, \\ a-b=2. \end{cases}$$

Единственное решение этой системы $a=1$, $b=-1$.

Возвращаясь к началу задачи, мы видим, что при всех натуральных значениях n выполнено равенство $\frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$. За-

пишем столбиком это равенство для $n=1, 2, 3, \dots, 48, 49$. Получим:

$$\text{при } n=1: \frac{2}{1 \cdot 3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3};$$

$$\text{при } n=2: \frac{2}{3 \cdot 5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5};$$

$$\text{при } n=3: \frac{2}{5 \cdot 7} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7};$$

$$\text{при } n=48: \frac{2}{95 \cdot 97} = \frac{1}{95} - \frac{1}{97};$$

$$\text{при } n=49: \frac{2}{97 \cdot 99} = \frac{1}{97} - \frac{1}{99};$$

Теперь почленно сложим левые и правые части этих равенств. Слева получается требуемая сумма S , справа сокращаются все слагаемые, кроме первого и последнего (т. е. сокращаются $\pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{5}, \dots, \pm \frac{1}{97}$). В итоге

$$\text{получаем: } S = \frac{1}{1} - \frac{1}{99} = 1 - \frac{1}{99} = \frac{98}{99}.$$

Совместные действия с дробями полезны при преобразованиях более громоздких выражений.

Пример 3

Упростите выражение: $\left(\frac{a^n + b^n}{a^n - b^n} - \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \right) \cdot \frac{a^{2n} + b^{2n}}{a^{2n} - b^{2n}}.$

В скобках приведем дроби к общему знаменателю и сложим их. Учтем формулы квадрата суммы и разности. Получаем:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a^n + b^n}{a^n - b^n} - \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \right) \cdot \frac{a^{2n} - b^{2n}}{a^{2n} + b^{2n}} = \frac{(a^n + b^n)^2 + (a^n - b^n)^2}{(a^n - b^n)(a^n + b^n)} \cdot \frac{a^{2n} - b^{2n}}{a^{2n} + b^{2n}} = \\ & = \frac{a^{2n} + 2a^n b^n + b^{2n} + a^{2n} - 2a^n b^n + b^{2n}}{(a^n)^2 - (b^n)^2} \cdot \frac{a^{2n} - b^{2n}}{a^{2n} + b^{2n}} = \\ & = \frac{2a^{2n} + 2b^{2n}}{a^{2n} - b^{2n}} \cdot \frac{a^{2n} - b^{2n}}{a^{2n} + b^{2n}} = \frac{2(a^{2n} + b^{2n})(a^{2n} - b^{2n})}{(a^{2n} - b^{2n})(a^{2n} + b^{2n})} = 2. \end{aligned}$$

Часто возникают алгебраические дроби и при решении уравнений.

Пример 4

Решим уравнение $\frac{a-2}{a+2} = \frac{a^2-4}{x}.$

Допустимые значения переменных для данного уравнения: любые значения a , кроме $a = -2$, и любые значения x , кроме $x = 0$.

По свойству пропорции получим: $(a-2)x = (a+2)(a^2-4)$ или $(a-2)x = (a+2)^2(a-2).$

Для того чтобы найти x , надо разделить обе части уравнения на выражение $a-2$. Сделать это можно, если только $a-2 \neq 0$ (т. е. $a \neq 2$). Тогда находим $x = (a+2)^2$. С учетом допустимости значений a и x получаем, что при $a-2 \neq 0$: $x = (a+2)^2$. Так как $a-2 \neq 0$, то в этом случае $x \neq 0$.

При $a=2$ уравнение $(a-2)x = (a+2)^2(a-2)$ принимает вид $0 \cdot x = 0$ и его решением является любое число x . С учетом допустимости

значений x величина $x \neq 0$. Итак, при $a = 2$: x – любое число, кроме $x = 0$.

При $a = -2$, очевидно, уравнение не имеет решений.

Итак, полный ответ по данной задаче: при $a \neq \pm 2$: $x = (a+2)^2$, при $a = -2$: x – любое число, кроме $x = 0$.

Совместные действия с дробями используются и при решении текстовых задач.

Пример 5

Турист прошел половину пути со скоростью v_1 км/ч, вторую половину пути – со скоростью v_2 км/ч. Найти среднюю скорость движения туриста.

Примечание: можно сначала рассмотреть частный случай задачи, например, при $v_1 = 3$ км/ч, $v_2 = 7$ км/ч.

Пусть половина пути составляет a км, тогда весь путь S равен $2a$ км.

На первую половину пути турист потратил время $t_1 = \frac{a}{v_1}$ (час), на вто-

рую половину пути – время $t_2 = \frac{a}{v_2}$ (час). Общее затраченное время

$t = t_1 + t_2 = \frac{a}{v_1} + \frac{a}{v_2} = \frac{av_2 + av_1}{v_1v_2} = \frac{a(v_1 + v_2)}{v_1v_2}$. Тогда по определению средней

скорости движения: $v = \frac{S}{t} = 2a : \frac{a(v_1 + v_2)}{v_1v_2} = \frac{2a \cdot v_1v_2}{a(v_1 + v_2)} = \frac{2a \cdot v_1v_2}{v_1 + v_2}$.

IV. Задание на уроке

№ 506 (3); 507 (3); 510 (5); 511 (1); 514, 516.

V. Задание на дом

№ 506 (4); 507 (4); 510 (6); 511 (2); 515, 517.

VI. Творческие задания

1) Найдите значения a и b , при которых равенство выполняется для всех значений x :

$$а) \frac{2x-2}{(x+1)(x-3)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3}; \quad б) \frac{4}{(x+1)(x-3)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3};$$

$$в) \frac{4x+10}{x^2+2x-8} = \frac{a}{x+4} + \frac{b}{x-2}; \quad г) \frac{12}{x^2+2x-8} = \frac{a}{x+4} + \frac{b}{x-2}.$$

Ответы: а) $a=1, b=1$; б) $a=-1, b=1$; в) $a=1, b=3$; г) $a=-2, b=2$.

2) Найдите сумму дробей:

$$а) \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{98 \cdot 100};$$

$$б) \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{97 \cdot 100};$$

$$в) \frac{1}{2 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 14} + \dots + \frac{1}{98 \cdot 102};$$

$$г) \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{97 \cdot 101}.$$

Ответы: а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{17}{50}$; в) $\frac{13}{102}$; г) $\frac{26}{101}$.

3) Решите уравнение:

$$а) \frac{3a}{2} = \frac{4a^2}{x};$$

$$б) \frac{2b^2}{3} = \frac{b}{x};$$

$$в) \frac{x}{a-3} = \frac{a}{a^2-9};$$

$$г) \frac{x}{a+4} = \frac{a}{a^2-16};$$

$$д) \frac{a-2}{a-1} = \frac{a^2-4}{x};$$

$$е) \frac{a+3}{a+2} = \frac{a^2-9}{x};$$

$$ж) \frac{a-1}{a+1} = \frac{a^2-1}{2ax};$$

$$з) \frac{a+2}{a-1} = \frac{a^2-4}{3ax}.$$

Ответы:

а) при $a \neq 0$: $x = \frac{8}{3}a$, при $a = 0$: x – любое число, кроме $x = 0$;

б) при $b \neq 0$: $x = \frac{3}{2b}$, при $b = 0$: x – любое число, кроме $x = 0$;

в) при $a \neq \pm 3$: $x = \frac{a}{a+3}$, при $a = \pm 3$ – решений нет;

г) при $a \neq \pm 4$: $x = \frac{a}{a-4}$, при $a = \pm 4$ – решений нет;

д) при $a \neq 1$, $a \neq \pm 2$: $x = (a+2)(a-1)$, при $a = -2$ и $a = 1$ – решений нет, при $a = 2$: x – любое число, кроме $x = 0$;

е) при $a \neq \pm 3$, $a \neq -2$: $x = (a+2)(a-3)$, при $a = -2$ и $a = 3$ – решений нет, при $a = -3$: x – любое число, кроме $x = 0$;

ж) при $a \neq \pm 1$, $a \neq 0$: $x = \frac{(a+1)^2}{2a}$, при $a = -1$ и $a = 0$ – решений нет, при $a = 1$: x – любое число, кроме $x = 0$;

з) при $a \neq \pm 2$, $a \neq 0$, $a \neq 1$: $x = \frac{(a-1)(a-2)}{3a}$, при $a = 0$, $a = 1$, $a = 2$ – решений нет, при $a = -2$: x – любое число, кроме $x = 0$.

4) Найти среднюю скорость движения машины, если из города А в город В она едет со скоростью v_1 (км/ч), а обратно – со скоростью v_2 (км/ч):

а) $v_1 = 20$, $v_2 = 80$;

б) $v_1 = 40$, $v_2 = 60$;

в) $v_1 = b$, $v_2 = 2b$;

г) $v_1 = 2b$, $v_2 = 3b$.

Ответы: а) 32 км/ч; б) 48 км/ч; в) $\frac{4}{3}b$ км/ч; г) $2,4b$ км/ч.

VII. Подведение итогов урока

Уроки 17–18. Контрольная работа № 5 по теме «Алгебраические дроби»

Контрольная работа составлена в шести вариантах (варианты 1, 2 – самые простые; варианты 3, 4 – средней сложности; варианты 5, 6 – самые сложные. Степень сложности меняется не слишком резко. Поэтому можно рекомендовать следующий критерий оценки: при решении вариантов 1, 2 оценка 3 ставится за любые три решенные задачи, оценка 4 – за четыре задачи и оценка 5 – за пять задач. Одна задача дает школьникам некоторую свободу выбора. При тех же критериях оценки за решение вариантов 3, 4 добавляется к набранным баллам дополнительно 0,5 балла; за решение вариантов 5, 6 – дополнительно 1,0 балла (то есть оценка 5 ставится уже за 4 задачи). Все задачи в варианте примерно равноценны, может быть несколько тяжелее задачи 5, 6.

Перед проведением контрольной работы учащихся целесообразно ознакомить с критериями оценки и разной сложностью вариантов. Выбор вариантов может быть осуществлен учителем или предоставлен самим учащимся. После урока-разбора контрольной может быть вывешено решение всех задач шести вариантов на стенде. Разумеется, разобрать такое количество задач на уроке невозможно (да и не нужно).

Вариант 1

1) Выполните действия:

а) $\frac{a^2}{a+4} - \frac{16}{a+4}$;

б) $\frac{2a-b}{3c} \cdot \frac{9c^2}{4a-2b}$;

в) $\frac{x-y}{a+b} : \frac{y-x}{b+a}$.

2) Упростите выражение: $\frac{x+3}{xy} - \frac{1}{y} + \frac{2}{x}$.

3) Вычислите: $\frac{53^2 + 2 \cdot 53 \cdot 14 + 14^2}{67}$.

4) Решите уравнение: $\frac{x-3}{3} + \frac{2x+1}{4} = \frac{x-5}{12}$.

5) Упростите выражение: $\left(1 - \frac{2x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right) \cdot \frac{y}{x-y}$.

6) Решите уравнение: $\frac{6}{x-3} = \frac{5}{x-4}$.

Вариант 2

1) Выполните действия:

а) $\frac{c^2}{c-5} - \frac{25}{c-5}$; б) $\frac{3a+b}{2c} \cdot \frac{4c^2}{6a+2b}$; в) $\frac{x+y}{a-b} : \frac{y+x}{b-a}$.

2) Упростите выражение: $\frac{a-7}{ab} - \frac{1}{b} + \frac{3}{a}$.

3) Вычислите: $\frac{42^2 - 2 \cdot 42 \cdot 14 + 14^2}{28}$.

4) Решите уравнение: $\frac{2x+1}{3} + \frac{3x-2}{5} = \frac{x-3}{15}$.

5) Упростите выражение: $\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{2a}{b} + 1\right) \cdot \frac{b}{a+b}$.

6) Решите уравнение: $\frac{5}{x-3} = \frac{4}{x-7}$.

Вариант 3

Упростите выражение:

1) $\left(\frac{7x-3y}{2x} + \frac{2x-7y}{2y}\right) \cdot \frac{4xy}{2x^2-3y^2}$; 2) $\left(1 + \frac{x}{y}\right) : \left(1 - \frac{x}{y}\right)$;

3) $\frac{15c}{5-x} + \frac{6c}{c^2-25} \cdot \frac{7c+35}{3}$.

4) Решите уравнение (найдите x): $\frac{x}{a-b} = \frac{a}{(a-b)^2}$.

5) Поезд проехал половину пути со скоростью 40 км/ч, а другую половину пути со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость поезда.

6) Найдите значение выражения: $\frac{65^2 - 42^2}{73^2 + 2 \cdot 73 \cdot 34 + 34^2}$.

Вариант 4

Упростите выражение:

1) $\left(\frac{3x+7y}{5x} + \frac{8x-3y}{5y}\right) \cdot \frac{10xy}{7y^2+8x^2}$; 2) $\left(2 - \frac{x}{y}\right) : \left(2 + \frac{x}{y}\right)$;

$$3) \frac{14a}{a-3} + \frac{12}{(3-a)^2} \cdot \frac{15-5a}{4}.$$

$$4) \text{ Решите уравнение (найдите } x): \frac{x}{a-b} = \frac{b}{b^2-a^2}.$$

5) Поезд проехал половину пути со скоростью 30 км/ч, а другую половину пути со скоростью 50 км/ч. Найдите среднюю скорость поезда.

$$6) \text{ Найдите значение выражения: } \frac{83^2 - 2 \cdot 83 \cdot 36 + 36^2}{114^2 - 67^2}.$$

Вариант 5

$$1) \text{ Упростите выражение: } \left(\frac{a+x}{x} - \frac{2x}{x-a} \right) \cdot \frac{a-x}{a^2+x^2}.$$

$$2) \text{ Найдите значение выражения: } \left(1 - \frac{a+3b}{2a} \right) \cdot \frac{1}{a-3b} - \frac{1+6a}{2a}.$$

$$3) \text{ Упростите выражение: } \left(\frac{2x}{x+y} - \frac{2x^2}{x^2+2xy+y^2} \right) \cdot \left(1 + \frac{2y}{x-y} \right).$$

$$4) \text{ Найдите значение выражения: } \left(x+y - \frac{4xy}{x+y} \right) \cdot \left(y-x + \frac{4xy}{y-x} \right) \text{ при}$$

$$x = 1,57, y = 0,43.$$

$$5) \text{ Решите уравнение (найдите } x): \frac{a+1}{a-1} = \frac{a^2-1}{x-2}.$$

6) Машина проехала от одного города до другого со скоростью $4v$, а обратно – со скоростью $5v$. Найдите среднюю скорость движения машины.

Вариант 6

$$1) \text{ Упростите выражение: } \left(\frac{2x}{x+a} + \frac{a-x}{x} \right) \cdot \frac{a^2+x^2}{a+x}.$$

$$2) \text{ Найдите значение выражения: } \left(5 - \frac{5x+2y}{2x} \right) \cdot \frac{1}{5x-2y} + \frac{4x-1}{2x}.$$

$$3) \text{ Упростите выражение: } \left(\frac{x}{x-y} + \frac{2xy}{x^2-2xy+y^2} \right) \cdot \left(\frac{2x}{x+y} - 1 \right).$$

$$4) \text{ Найдите значение выражения: } \left(a-b + \frac{4ab}{a-b} \right) \cdot \left(b+a - \frac{4ab}{a+b} \right) \text{ при}$$

$$a = 1,28, b = 0,72.$$

$$5) \text{ Решите уравнение (найдите } x): \frac{c-1}{c+1} = \frac{c^2-1}{x+3}.$$

б) Машина проехала от одного города до другого со скоростью $3v$, а обратно - со скоростью $4v$. Найдите среднюю скорость движения машины.

Урок 19. Анализ контрольной работы

I. Подведение итогов контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Удобно данные заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

Итоги	№ задачи				
	1	2	3	...	6
+	5				
±	1				
-	1				
Ø	1				

Обозначения:

++ - число решивших задачу правильно или почти правильно;

± - число решивших задачу со значительными погрешностями;

-- - число не решивших задачу;

Ø - число не решавших задачу.

Варианты 1, 2 - 8 учащихся.

2. Типичные ошибки при решении задач.

3. Задачи, вызвавшие наибольшие трудности, и их разбор (учителем или школьниками, решившими эту задачу).

II. Разбор задач вариантов

Вариант 1

1) Ответ:

а) $a - 4$ (при $a \neq -4$);

б) $\frac{3}{2}c$ (при $b \neq 2a, c \neq 0$);

в) -1 (при $a \neq -b, x \neq y$).

2) Ответ: $\frac{2y+3}{xy}$ (при $x, y \neq 0$).

3) Ответ: 67.

4) Ответ: $x = \frac{5}{9}$.

5) Ответ: $\frac{x-y}{y}$ (при $x \neq y, y \neq 0$).

6) Ответ: $x = 9$.

Вариант 2

1) Ответ:

а) $c+5$ (при $c \neq 5$);б) c (при $b \neq -3a, c \neq 0$);в) -1 (при $a \neq b, x \neq -y$).2) Ответ: $\frac{3b-7}{ab}$ (при $a, b \neq 0$).

3) Ответ: 28.

4) Ответ: $x = -\frac{1}{9}$.5) Ответ: $\frac{a+b}{b}$ (при $a \neq -b, b \neq 0$).6) Ответ: $x = 23$.**Вариант 3**1) Ответ: 2 (при $x, y \neq 0, 2x^2 \neq 3y^2$);2) $\frac{x+y}{y-x} c$ (при $x \neq y, y \neq 0$);3) Ответ: $\frac{c}{5-c}$ (при $c \neq \pm 5$).4) Ответ: $x = -\frac{a}{a-b}$ (при $a \neq b$).

5) Ответ: 48 км/ч.

6) Ответ: $\frac{23}{107}$.**Вариант 3**1) Ответ: 2 (при $x, y \neq 0$);2) $\frac{2y-x}{2y+x} c$ (при $x \neq -2y, y \neq 0$);3) Ответ: $\frac{a}{3-a}$ (при $a \neq 3$).4) Ответ: $x = -\frac{b}{a+b}$ (при $a \neq \pm b$).

5) Ответ: 37,5 км/ч.

6) Ответ: $\frac{47}{181}$.**Вариант 5**

1) Внутри скобок приведем дроби к общему знаменателю и учтем формулу разности квадратов: $\left(\frac{a+x}{x} - \frac{2x}{x-a} \right) \cdot \frac{a-x}{a^2+x^2} =$

$$= \frac{(x+a)(x-a)-2x^2}{x(x-a)} \cdot \frac{a-x}{a^2+x^2} = \frac{x^2-a^2-2x^2}{x(x-a)} \cdot \frac{a-x}{a^2+x^2} = \frac{(a^2+x^2)(x-a)}{x(x-a)(a^2+x^2)} = \frac{1}{x}$$

(при $x \neq 0, x \neq a$).

Ответ: $\frac{1}{x}$ (при $x \neq 0, x \neq a$).

2) Внутри скобок приведем дроби к общему знаменателю:

$$\left(1 - \frac{a+3b}{2a}\right) \cdot \frac{1}{a-3b} - \frac{1+6a}{2a} = \frac{2a-a-3b}{2a} \cdot \frac{1}{a-3b} - \frac{1+6a}{2a} =$$

$$= \frac{a-3b}{2a(a-3b)} - \frac{1+6a}{2a} = \frac{1}{2a} - \frac{1+6a}{2a} = \frac{1-1-6a}{2a} = \frac{-6a}{2a} = -3 \quad (\text{при } a \neq 0, a \neq 3b).$$

Ответ: -3 (при $a \neq 0, a \neq 3b$).

3) Учтем формулу квадрата суммы и приведем дроби в скобках к общему знаменателю: $\left(\frac{2x}{x+y} - \frac{2x^2}{x^2+2xy+y^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{2y}{x-y}\right) =$

$$= \frac{2x(x+y)-2x^2}{(x+y)^2} \cdot \frac{x-y+2y}{x-y} = \frac{2x^2+2xy-2x^2}{(x+y)^2} \cdot \frac{x+y}{x-y} = \frac{2xy(x+y)}{(x+y)^2(x-y)} =$$

$$= \frac{2xy}{(x+y)(x-y)} = \frac{2xy}{x^2-y^2} \quad (\text{при } x \neq \pm y).$$

Ответ: $\frac{2xy}{x^2-y^2}$ (при $x \neq \pm y$).

4) Приведем дроби к общему знаменателю и учтем формулы квадрата суммы и разности: $\left(x+y - \frac{4xy}{x+y}\right) \cdot \left(y-x + \frac{4xy}{y-x}\right) =$

$$= \frac{(x+y)^2-4xy}{x+y} \cdot \frac{(y-x)^2+4xy}{y-x} = \frac{x^2+2xy+y^2-4xy}{x+y} \cdot \frac{y^2-2yx+x^2+4xy}{y-x} =$$

$$= \frac{(x-y)^2}{x+y} \cdot \frac{(y+x)^2}{y-x} = \frac{(y-x)^2(y+x)^2}{(y+x)(y-x)} = (y-x)(y+x). \quad \text{При } x=1,57, y=0,43$$

получаем: $(0,43-1,57)(0,43+1,57) = -1,14 \cdot 2 = -2,28$.

Ответ: $-2,28$.

5) Используя свойства пропорции, найдем: $(x-2)(a+1) = (a^2-1)(a-1)$ или $(x-2)(a+1) = (a+1)(a-1)^2$.

При $a \neq \pm 1$: $x-2 = (a-1)^2$, тогда $x = 2 + (a-1)^2$, при $a = -1$: x — любое число, кроме $x = 2$, при $a = 1$ уравнение не имеет решений.

Ответ: при $a \neq \pm 1$: $x = 2 + (a - 1)^2$, при $a = -1$: x — любое число, кроме $x = 2$, при $a = 1$ решений нет.

6) Пусть расстояние между городами S км. Тогда на поездку туда машина тратит время $t_1 = \frac{S}{v_1} = \frac{S}{4v}$, на поездку обратно тратит время

$t_2 = \frac{S}{v_2} = \frac{S}{5v}$. Всего на путь длиной $2S$ км было потрачено время

$t = t_1 + t_2 = \frac{S}{4v} + \frac{S}{5v} = \frac{9S}{20v}$. Средняя скорость движения машины:

$$W = \frac{2S}{t} = 2S : \frac{9S}{20v} = \frac{40S \cdot v}{9S} = \frac{40}{9}v = 4\frac{4}{9}v.$$

Ответ: $4\frac{4}{9}v$.

Вариант 6

1) Внутри скобок приведем дроби к общему знаменателю и учтем формулу разности квадратов: $\left(\frac{2x}{x+a} + \frac{a-x}{x}\right) : \frac{a^2+x^2}{a+x} =$

$$= \frac{2x^2 + (a-x)(a+x)}{(x+a) \cdot x} \cdot \frac{a+x}{a^2+x^2} = \frac{2x^2 + a^2 - x^2}{(a+x) \cdot x} \cdot \frac{a+x}{a^2+x^2} = \frac{(x^2+a^2)(a+x)}{(a+x) \cdot x(a^2+x^2)} = \frac{1}{x}$$

(при $x \neq 0$, $x \neq -a$).

Ответ: $\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$, $x \neq -a$.

2) Внутри скобок приведем дроби к общему знаменателю:

$$\left(5 - \frac{5x+2y}{2x}\right) \cdot \frac{1}{5x-2y} + \frac{4x-1}{2x} = \frac{10x-5x-2y}{2x} \cdot \frac{1}{5x-2y} + \frac{4x-1}{2x} =$$

$$= \frac{5x-2y}{2x(5x-2y)} + \frac{4x-1}{2x} = \frac{1+4x-1}{2x} = \frac{4x}{2x} = 2 \text{ (при } x \neq 0, 5x-2y \neq 0 \text{)}.$$

Ответ: 2 (при $x \neq 0$, $5x-2y \neq 0$).

3) Учтем формулу квадрата разности и приведем дроби в скобках к общему знаменателю: $\left(\frac{x}{x-y} + \frac{2xy}{x^2-2xy+y^2}\right) \cdot \left(\frac{2x}{x+y} - 1\right) =$

$$= \frac{x(x-y)+2xy}{(x-y)^2} \cdot \frac{2x-x-y}{x+y} = \frac{x^2-xy+2xy}{(x-y)^2} \cdot \frac{x-y}{x+y} = \frac{x(x+y)(x-y)}{(x-y)^2(x+y)} = \frac{x}{x-y}$$

(при $x \neq \pm y$).

Ответ: $\frac{x}{x-y}$ (при $x \neq \pm y$).

4) Приведем дроби к общему знаменателю и учтем формулы квадрата суммы и разности: $\left(a - b + \frac{4ab}{a - b}\right) \cdot \left(b + a - \frac{4ab}{a + b}\right) =$
 $= \frac{(a - b)^2 + 4ab}{a - b} - \frac{(a + b)^2 - 4ab}{a + b} = \frac{a^2 - 2ab + b^2 + 4ab}{a - b} \cdot \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{a + b} =$
 $= \frac{(a + b)^2}{a - b} \cdot \frac{(a - b)^2}{a + b} = \frac{(a + b)^2 (a - b)^2}{(a - b)(a + b)} = (a + b)(a - b)$. При $a = 1,28$, $b = 0,72$
 получаем: $(1,28 + 0,72)(1,28 - 0,72) = 2 \cdot 0,56 = 1,12$.

Ответ: 1,12.

5) Используя свойства пропорции, найдем $(c - 1)(x + 3) = (c^2 - 1)(c + 1)$
 или $(c - 1)(x + 3) = (c - 1)(c + 1)^2$. При $c \neq \pm 1$: $x + 3 = (c + 1)^2$, тогда $x = (c + 1)^2 - 3$,
 при $c = -1$ уравнение не имеет решений, при $c = 1$: x – любое число,
 кроме $x = -3$.

Ответ: при $c \neq \pm 1$: $x = (c + 1)^2 - 3$, при $c = -1$ – решений нет, при $c = 1$: x – любое число, кроме $x = -3$.

6) Пусть расстояние между городами S км. Тогда на поездку туда машина тратит время $t_1 = \frac{S}{v_1} = \frac{S}{3v}$, на поездку обратно тратит время

$t_2 = \frac{S}{v_2} = \frac{S}{4v}$. Всего на путь длиной $2S$ км было потрачено время

$t = t_1 + t_2 = \frac{S}{3v} + \frac{S}{4v} = \frac{9S}{12v}$. Средняя скорость движения машины:

$W = \frac{2S}{t} = 2S : \frac{9S}{12v} = \frac{24S \cdot v}{9S} = \frac{24}{9}v = 3\frac{1}{3}v$.

Ответ: $3\frac{1}{3}v$.

Урок 20. Подготовка к тематическому зачету

Цель: повторить решение задач по теме «Алгебраические дроби».

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Основные понятия

Алгебраической дробью называют дробь, числитель и знаменатель которой являются алгебраическими выражениями. При этом дробь име-

ет смысл только при допустимых значениях переменных (т. е. при таких значениях, для которых знаменатель дроби не равен нулю).

Основное свойство дроби: числитель и знаменатель дроби можно умножить или разделить на одно и то же число или выражение (не равное нулю) и получится дробь, равная данной. Используя основное свойство дроби, можно сокращать алгебраическую дробь на общий множитель числителя и знаменателя.

Сложение и вычитание алгебраических дробей производится по тем же правилам, что и для числовых дробей. При этом дроби приводят к общему знаменателю и используют правило сложения и вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.

Умножение и деление алгебраических дробей также производится по тем же правилам, что и для числовых дробей. При умножении дробей получается дробь, числитель которой равен произведению числителей, а знаменатель – произведению знаменателей данных дробей. При делении дробей операция деления заменяется умножением, а делитель – обратной дробью.

III. Задание на уроке

№ 506 (2); 508 (3); 509 (1); 510 (3, 5); 512 (1).

IV. Задание на дом

№ 506 (4); 508 (4); 509 (2); 510 (4, 6); 512 (2).

V. Подведение итогов урока

Уроки 21–22. Зачет по теме «Алгебраические дроби»

Цели: сравнение успеваемости учащихся при одинаковой сложности заданий; возможность повышения оценок за выполненные контрольные работы.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Характеристика зачетной работы

Работа составлена в двух равноценных вариантах. По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий. Соответственно у учащихся возрастает возможность выбора задач. Все задания разбиты на три блока А, В и С. Самые простые задачи находятся в части А, более сложные – в части В, еще сложнее – в части С. Каждая задача из А оценивается в 1 балл, из В – 2 балла, из С – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Поэтому разбору заданий работы отдельного задания можно и не посвящать (решения задач могут быть вывешены на стенде).

Вариант 1

А

Выполните действия:

$$1) \frac{xy}{x-y} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right).$$

$$2) \frac{a}{a-7} : \left(\frac{a+7}{7} + \frac{7}{a-7} \right).$$

$$3) \left(1 - \frac{a-b}{a+b} \right) \cdot \left(2 + \frac{2b}{a-b} \right).$$

$$4) \text{ Упростите выражение: } \frac{3x}{x^2-9} - \frac{2y}{xy+3y} - \frac{y}{xy-3y}.$$

5) Сократите дробь $\frac{ab+ac-3c-3b}{b^2-c^2}$ и найдите ее значение при $a=3,5, b=1,73, c=0,73$.

$$6) \text{ Решите уравнение: } \frac{5x-2}{x-1} + \frac{2x+3}{x+1} = \frac{7x^2+3}{x^2-1}.$$

7) Туристы прошли расстояние S со скоростью 4 км/ч и вдвое большее расстояние $2S$ со скоростью 5 км/ч. На весь путь они затратили 13 часов. Найдите расстояние S .

В

Выполните действия:

$$8) \frac{xy-y^2}{x^2+y^2} \cdot \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y} \right).$$

$$9) \left(\frac{a^2}{a+b} - \frac{a^3}{a^2+2ab+b^2} \right) : \left(\frac{a}{a+b} - \frac{a^2}{a^2-b^2} \right).$$

$$10) \text{ Упростите выражение: } \frac{c^2-ac}{a^2-b^2} \cdot \frac{a-b}{c^2-a^2} : \left(c - \frac{ac}{a+c} \right).$$

$$11) \text{ Решите уравнение: } \frac{3x}{x-1} + \frac{5x}{x+4} = \frac{8x^2+7x}{x^2+3x-4}.$$

С

$$12) \text{ Известно, что } x + \frac{1}{x} = a. \text{ Найдите } x^3 + \frac{1}{x^3}.$$

13) Упростите выражение $\frac{a^{2n}-b^{2n}}{a^{2n}+b^{2n}} \cdot \frac{a^{4n}-b^{4n}}{a^{2n}-2a^nb^n+b^{2n}}$.

14) Найдите значения a и b , при которых для любых значений x выполняется равенство $\frac{3x+4}{x^2+3x+2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$.

Вариант 2

А

Выполните действия:

1) $\frac{xy}{x-y} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)$.

2) $\left(\frac{a}{a+3} - \frac{a}{a-3} \right) \cdot \frac{a+3}{a}$.

3) $\left(1 + \frac{a+b}{a-b} \right) \cdot \left(2 - \frac{2a}{a+b} \right)$.

4) Упростите выражение: $\frac{7a}{a^2-b^2} - \frac{5a}{ab-a^2} - \frac{12a}{a^2+ab}$.

5) Сократите дробь $\frac{5x-5y+ax-ay}{x^2-y^2}$ и найдите ее значение при $a=2, x=1,73, y=0,27$.

6) Решите уравнение: $\frac{3x-4}{x+1} + \frac{4x+3}{x-1} = \frac{7x^2+14x}{x^2-1}$.

7) Туристы прошли расстояние S со скоростью 5 км/ч и вдвое большее расстояние $3S$ со скоростью 4 км/ч. На весь путь они затратили 19 часов. Найдите расстояние S .

В

Выполните действия:

8) $\frac{x^2+xy}{x^2+y^2} \cdot \left(\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y} \right)$.

9) $\left(\frac{a^2}{a-b} - \frac{a^2b}{a^2-2ab+b^2} \right) : \left(\frac{2a^2}{a^2-b^2} - \frac{a}{a+b} \right)$.

10) Упростите выражение: $\frac{a^2-c^2}{a+b} \cdot \frac{a^2-b^2}{ac+c^2} : \left(a + \frac{ac}{a-c} \right)$.

11) Решите уравнение: $\frac{2x}{x+1} + \frac{4x}{x-5} = \frac{6x^2-6x}{x^2-4x-5}$.

С

12) Известно, что $x + \frac{1}{x} = a$. Найдите $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

13) Упростите выражение $\frac{(x^n - y^n)}{x^{4n} - y^{4n}} : \frac{x^{2n} - y^{2n}}{x^{2n} + y^{2n}}$.

14) Найдите значения a и b , при которых для любых значений x выполняется равенство $\frac{2x+3}{x^2+3x+2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$.

III. Разбор заданий

Вариант 1

1) Ответ: 1 (при $x, y \neq 0, x \neq -y$).

2) Ответ: $\frac{7}{a}$ (при $a \neq 0, a \neq 7$).

3) Ответ: $\frac{4ab}{a^2 - b^2}$ (при $a \neq \pm b$).

4) Ответ: $\frac{3}{x^2 - 9}$ (при $x \neq \pm 3, y \neq 0$).

5) Ответ: $\frac{a-3}{b-c}$ (при $b \neq \pm c$); 0,5.

6) Ответ: $x = 2$.

7) Ответ: $S = 20$ км.

8) Ответ: $\frac{y}{x+y}$ (при $x \neq \pm y$).

9) Ответ: $\frac{b-a}{b+a}$ (при $a \neq \pm b, a \neq 0, b \neq 0$).

10) Ответ: $\frac{1}{c(a+b)}$ (при $a \neq \pm b, a \neq \pm c, c \neq 0$).

11) Ответ: x — любое число, кроме $x = -4$ и $x = 1$.

12) Обе части равенства $x + \frac{1}{x} = a$ возведем в третью степень. Полу-

чим: $x^3 + 3x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3x \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = a^3$ или $x^3 + 3x + 3 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} = a^3$, или

$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 3 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) = a^3$, или $x^3 + \frac{1}{x^3} + 3a = a^3$, откуда $x^3 + \frac{1}{x^3} = a^3 - 3a$.

Ответ: $a^3 - 3a$.

13) Учтем формулу разности квадратов и квадрата разности. Полу-

$$\begin{aligned} \text{чим: } \frac{a^{2n} - b^{2n}}{a^{2n} + b^{2n}} \cdot \frac{a^{4n} - b^{4n}}{a^{2n} - 2a^n b^n + b^{2n}} &= \frac{(a^n)^2 - (b^n)^2}{a^{2n} + b^{2n}} \cdot \frac{(a^{2n})^2 - (b^{2n})^2}{(a^n)^2 - 2a^n b^n + (b^n)^2} = \\ &= \frac{(a^n - b^n)(a^n + b^n)(a^{2n} - b^{2n})(a^{2n} + b^{2n})}{(a^{2n} + b^{2n})(a - b^n)^2} = \frac{(a^n + b^n)((a^n)^2 - (b^n)^2)}{a^n - b^n} = \\ &= \frac{(a^n + b^n)(a^n - b^n)(a^n + b^n)}{a^n - b^n} = (a^n + b^n)^2. \end{aligned}$$

Ответ: $(a^n + b^n)^2$.

14) В правой части равенства приведем дроби к общему знаменателю и сложим их: $\frac{3x+4}{x^2+3x+2} = \frac{a(x+2)+b(x+1)}{(x+1)(x+2)}$

$$\text{или } \frac{3x+4}{x^2+3x+2} = \frac{ax+2a+bx+b}{x^2+3x+2},$$

$$\text{или } \frac{3x+4}{x^2+3x+2} = \frac{(a+b)x+(2a+b)}{x^2+3x+2}.$$

Две дроби с одинаковыми знаменателями равны при всех допустимых значениях x (т. е. при $x \neq -1$ и $x \neq -2$), если при таких значениях x равны их числители, т. е. $3x+4 = (a+b)x + (2a+b)$. Такое равенство выполняется при всех x , если в обеих частях совпадают коэффициенты при x и свободные члены. Получаем систему двух линейных уравнений: $\begin{cases} a+b=3, \\ 2a+b=4 \end{cases}$, которая имеет единственное решение $a=1$, $b=2$.

Ответ: $a=1$, $b=2$.

Вариант 2

1) Ответ: -1 (при $x, y \neq 0, x \neq y$).

2) Ответ: $\frac{6}{3-a}$ (при $a \neq 0, a \neq 3$).

3) Ответ: $\frac{4ab}{a^2-b^2}$ (при $a \neq \pm b$).

4) Ответ: $\frac{17b}{a^2-b^2}$ (при $a \neq 0, a \neq \pm b$).

5) Ответ: $\frac{5+a}{x+y}$ (при $x \neq \pm y$); 3,5.

6) Ответ: $x=0,5$.

7) Ответ: $S=20$ км.

8) Ответ: $\frac{y}{x-y}$ (при $x \neq \pm y$).

9) Ответ: $\frac{a^2}{a-b}$ (при $a \neq 0, a \neq \pm b$).

10) Ответ: $\frac{a^2(a-b)}{c}$ (при $a \neq -b, a \neq \pm c, c \neq 0$).

11) Ответ: x – любое число, кроме $x = -1$ и $x = 5$.

12) Обе части равенства $x + \frac{1}{x} = a$ возведем в третью степень. Получим:

$$x^3 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = a^2 \quad \text{или} \quad x^3 + 3 + \frac{1}{x^2} = a^2, \quad \text{или} \quad \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2 = a^2,$$

откуда $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$.

Ответ: $a^2 - 2$.

13) Учтем формулу разности квадратов и квадрата разности. Получим:

$$\begin{aligned} \frac{(x^n - y^n)}{x^{4n} - y^{4n}} \cdot \frac{x^{2n} - y^{2n}}{x^{2n} + y^{2n}} &= \frac{(x^n - y^n)^2}{(x^{2n})^2 - (y^{2n})^2} \cdot \frac{x^{2n} + y^{2n}}{x^{2n} - y^{2n}} = \\ &= \frac{(x^n + y^n)^2 \cdot (x^{2n} + y^{2n})}{(x^{2n} - y^{2n})(x^{2n} + y^{2n})(x^{2n} - y^{2n})} = \frac{(x^n + y^n)^2}{((x^n)^2 - (y^n)^2)^2} = \\ &= \frac{(x^n + y^n)^2}{(x^n - y^n)^2 (x^n + y^n)^2} = \frac{1}{(x^n - y^n)^2}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{(x^n - y^n)^2}$.

14) В правой части равенства приведем дроби к общему знаменателю и сложим их:

$$\frac{2x+3}{x^2+3x+2} = \frac{a(x+2)+b(x+1)}{(x+1)(x+2)} \quad \text{или} \quad \frac{2x+3}{x^2+3x+2} = \frac{ax+2a+bx+b}{(x+1)(x+2)},$$

или $\frac{2x+3}{x^2+3x+2} = \frac{(a+b)x+(2a+b)}{x^2+3x+2}$.

Две дроби с одинаковыми знаменателями равны при всех допустимых значениях x (т. е. при $x \neq -1$ и $x \neq -2$), если при таких значениях x равны их числители, т. е. $2x+3 = (a+b)x + (2a+b)$. Такое равенство выполняется при всех x , если в обеих частях совпадают коэффициенты при x и свободные члены. Получаем систему двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} a+b=2, \\ 2a+b=3 \end{cases}, \quad \text{которая имеет единственное решение } a=1, b=1.$$

Ответ: $a=1, b=1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В. и др. Под ред. А.Н. Тихонова. Алгебра: Учебник для 7 класса. – 9 изд. – М.: Просвещение, 2001.
2. Балк М.Б., Балк Г.Д. Математика после уроков (пособие для учителей). – М.: Просвещение, 1971.
3. Васюк Н.В., Мартыросян М.А., Слепенкова Е.В. и др. Дидактические материалы по алгебре для 7 класса. – М.: Издательство, 2000.
4. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. – 22 изд. – М.: Наука, 1972.
5. Гусев В.А., Мордкович А.Г. Математика. Справочные материалы. – М.: Просвещение, 1988.
6. Завич Л.П., Кузнецова Л.В., Суворова С.Б. Дидактические материалы по алгебре для 7 класса. – 7 изд. – М.: Просвещение, 2002.
7. Завич Л.П., Шляпочник Л.Я., Козулин Б.В. Контрольные и проверочные работы по алгебре для 7 класса. – 2 изд. – М.: Дрофа, 2002.
8. Игнатъев Е.И. В царстве смекалки. – 3 изд. – М.: Наука, 1982.
9. Кострикина Н.П. Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7–9 классов (книга для учителя). – М.: Просвещение, 1991.
10. Короткова Л.М., Савищева Н.В. Алгебра : Тесты : Рабочая тетрадь. 7 класс. – М.: Рольф, 2002.
11. Куликова О.В., Рурукин А.Н., Сафарова Ю.А. Алгебра. 7 класс. Сборник решений задач. – М.: Яхонт, 2001.
12. Лебидько В.В., Рурукин А.Н. Математика. Алгебра и геометрия. Для учащихся 7 класса. – М.: МИФИ, 2001.
13. Лебидько В.В., Рурукин А.Н. Алгебра. 7 класс. Сборник решений задач. – М.: Яхонт, 2002.
14. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И. и др. Под ред. С.А. Тетковского. Алгебра: Учебник для 7 класса. – 9 изд. – М.: Просвещение, 2000.
15. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. Алгебраический тренажер. – Киев: А.С.К., 1998.
16. Миндюк М.Б., Миндюк Н.Г. Разноуровневые дидактические материалы по алгебре. 7 класс. – М.: Генжер, 2002.
17. Мишкина А.М., Рурукин А.Н., Сергеев А.М. и др. Алгебра. 7 класс. Сборник решений задач. – М.: Яхонт, 2002.
18. Мордкович А.Г., Мишустина Т.Н., Тульчинская Е.Е. Алгебра: Задачник для 7 класса. – 3 изд. – М.: Мнемозина, 2000.
19. Перельман Я.И. Живая математика. – М.: Наука, 1978.
20. Перельман Я.И. Занимательная алгебра. – 12 изд. – М.: Наука, 1970.
21. Рурукин А.Н. Математика. Пособие для интенсивной подготовки к выпускному, вступительному экзаменам и ЕГЭ по математике. – М.: ВАКО, 2004.
22. Хачатурьян Н.В. Практическое руководство по решению задач по алгебре в 7–9 классах. – М.: Яхонт, 2000.
23. Цыпкин А.Г. Справочник по математике для средних учебных заведений. – 4 изд. – М.: Наука, 1988.
24. Цыпкин А.Г., Пинский А.И. Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы. – М.: Наука, 1983.
25. Шуба М.Ю. Занимательные задания в обучении математике (книга для учителя). – М.: Просвещение, 1994.

СОДЕРЖАНИЕ

От авторов	3
Рекомендации к проведению уроков	5
Тематическое планирование учебного материала для учебника Ю.Н. Макарычева и др. «Алгебра 7».	9
Поурочные разработки к учебнику Ю.Н. Макарычева и др.	10
Тематическое планирование для учебника Ш.А. Алимова и др. «Алгебра 7».	356
Поурочные разработки к учебнику Ш.А. Алимова и др.	358
Литература	413